CORRECTION DES EXERCICES DE BAC

(sauf les trois derniers exercices : 3, 4 et 5 de la rubrique "Géométrie et Arithmétique")

Similitudes indirectes

Exercice 1 :

1. (a) On sait que l'écriture complexe d'une similitude directe est $z' = az + b$.
$s(\mathrm{O}) = \mathrm{D} \iff 1 = 0+b \iff b = 1$; $s(\mathrm{A}) = \mathrm{E} \iff 1+3\mathrm{i} = a\times(-2)+1 \iff a = -\frac{3}{2}\mathrm{i}$.
L'écriture complexe de s est donc : $z' = -\frac{3}{2}\mathrm{i}z + 1$.

(b) L'angle de la similitude s est $\arg(a) = \arg(-\frac{3}{2}i) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ car $-\frac{3}{2}i$ est un imaginaire pur de partie imaginaire négative.
Le rapport de la similitude s est $|a| = \left|-\frac{3}{2}i\right| = \frac{3}{2}$.

(c) On sait déjà que O a pour image D et A a pour image E. Cherchons les images de B et C : $z'_B = -\frac{3}{2}iz_B + 1 = -\frac{3}{2}i(-2+i) + 1 = 3i + \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2} + 3i = z_F$ donc $s(B) = F$. De plus $z'_C = -\frac{3}{2}iz_C + 1 = -\frac{3}{2}i \times i + 1 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2} = z_G$. Par conséquent, $s(C) = G$. Enfin OABC étant un rectangle son image par s est aussi un rectangle : c'est donc le rectangle DEFG.

2. (a) En utilisant l'écriture complexe de s' :
– Pour $z = z_D = 1$; $z' = -\frac{2}{3}\mathrm{i} \times 1 + \frac{5}{3}\mathrm{i} = \mathrm{i} = z_C$ donc $s'(D) = C$
– Pour $z = z_E = 1 + 3i$, $z' = -\frac{2}{3}\mathrm{i}(1 - 3\mathrm{i}) + \frac{5}{3}\mathrm{i} = -2 + \mathrm{i} = z_B$ donc $s'(E) = B$.
– Pour $z = z_F = \frac{5}{2} + 3i$, $z' = -\frac{2}{3}\mathrm{i}\left(\frac{5}{2} - 3\mathrm{i}\right) + \frac{5}{3}\mathrm{i} = -2 = z_A$ donc $s'(F) = A$.
– Pour $z = z_G = \frac{5}{2}$ $z' = -\frac{2}{3}\mathrm{i}\left(\frac{5}{2}\right) + \frac{5}{3}\mathrm{i} = 0 = z_O$ donc $s'(G) = O$.
On en déduit que l'image par s' du rectangle $DEFG$ est le rectangle $OABC$

(b) On a $g(\mathrm{O}) = s'[s(\mathrm{O})] = s'(\mathrm{D}) = \mathrm{C}$; $g(\mathrm{A}) = s'[s(\mathrm{A})] = s'(\mathrm{E}) = \mathrm{B}$;
$g(\mathrm{B}) = s'[s(\mathrm{B})] = s'(\mathrm{F}) = \mathrm{A}$; $g(\mathrm{C}) = s'[s(\mathrm{C})] = s'(\mathrm{G}) = \mathrm{O}$.
L'image du rectangle OABC par la similitude g est donc le rectangle CBAO.

(c) Cherchons l'écriture complexe de g : l'écriture complexe de s est $z \mapsto z_1 = -\frac{3}{2}iz + 1$ et celle de s' est $z \mapsto z_2 = -\frac{2}{3}i\overline{z} + \frac{5}{3}i$ donc l'écriture complexe de $g = s' \circ s$ est

$$z \mapsto z' = -\frac{2}{3}i\overline{z_1} + \frac{5}{3}i = -\frac{2}{3}i\overline{\left(-\frac{3}{2}iz + 1\right)} + \frac{5}{3}i = -\frac{2}{3}i \times \left(-\frac{3}{2}(-i)\overline{z}\right) - \frac{2}{3}i + \frac{5}{3}i = \overline{z} + i$$

Un point M d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ est invariant par g si, et seulement si :

$$z = \overline{z} + \mathrm{i} \iff x + \mathrm{i}y = x - \mathrm{i}y + \mathrm{i} \iff 2y = 1 \iff y = \frac{1}{2}, \quad x \text{ étant quelconque}$$

L'ensemble des points invariants par g est la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$. Or g composée de deux similitudes est une similitude ayant une droite de points invariants : c'est la symétrie axiale autour de la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$. On a d'ailleurs vu au dessus que A et B d'une part O et C d'autre part s'échangent dans la similitude g : l'axe de la symétrie est donc l'un des axes de symétrie du rectangle OABC.

Exercice 2 :

1. (a) $z_{\mathrm{A}} = \sqrt{6} + \mathrm{i}\sqrt{2}$, donc $|z_{\mathrm{A}}|^2 = 6 + 2 = 8 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$ d'où $|z_{\mathrm{A}}| = 2\sqrt{2}$. On peut en factorisant ce module écrire : $z_{\mathrm{A}} = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$. De même $z_{\mathrm{B}} = -\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{6}$, donc $|z_{\mathrm{B}}|^2 = 2 + 6 = 8 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$ soit $|z_{\mathrm{B}}| = 2\sqrt{2}$. On peut en factorisant ce module écrire : $z_{\mathrm{B}} = 2\sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

   (b) On sait que $\mathrm{OA} = |z_A| = 2\sqrt{2}$ et $\mathrm{OB} = |z_B| = 2\sqrt{2}$ donc le triangle OAB est isocèle en O. De plus, $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right)\ [2\pi]$ donc $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}}{2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}\right)\ [2\pi]$. Comme $\dfrac{2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}}{2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}} = e^{i\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ alors $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) \equiv \arg\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)\ [2\pi]$ soit $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
   Le triangle OAB est donc rectangle direct en O.

   (c) Comme $\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\overline{0} = 0$, le point O est invariant par f. A a pour image A′, B a pour image B′. Une similitude indirecte conserve les rapports de distance et transforme un angle en son opposé donc l'image par une similitude indirecte f du triangle rectangle isocèle direct OAB est le triangle indirect isocèle, rectangle en O, OA′B′.

   (d)
$$\begin{aligned} z_{\mathrm{A'}} &= \left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\overline{z_{\mathrm{A}}} = \left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\overline{\sqrt{6} + \mathrm{i}\sqrt{2}} = \left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2}\right) \\ &= \sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2} + 3\mathrm{i}\sqrt{2} + \sqrt{6} = 2\sqrt{6} + 2\mathrm{i}\sqrt{2} = 2z_{\mathrm{A}} \end{aligned}$$

   e dernier résultat montre que $\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OA}$ donc les points O, A et A′ sont alignés et A est le milieu de [OA′] : A′ est donc le symétrique de O autour de A. Il suffit ensuite de compléter le triangle isocèle rectangle en O indirect, OA′B′ pour construire B'. (voir annexe pour la figure)

2. (a) L'écriture complexe de r est $z' = z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et cele de s est $z' = \overline{z}$. L'écriture complexe de $g = r \circ s$ est donc $z' = \overline{z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

   (b) Pour $z = 0$, On a $\overline{z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 0$, donc O est invariant par g.
   L'image par g de A a pour affixe :
$$\begin{aligned} \overline{\sqrt{6} + \mathrm{i}\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} &= \left(\sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2} + \mathrm{i}\frac{3\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6} + \mathrm{i}\sqrt{2} = z_{\mathrm{A}} \end{aligned}$$
   Donc A est lui aussi invariant par g.

   (c) g composée d'une similitude indirecte et d'une similitude directe est une similitude indirecte ayant deux points invariants distincts O et A : c'est donc la réflexion d'axe (OA).

3. (a) L'écriture complexe de f est : $z' = \left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\overline{z} = 2\left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\,\overline{z}$. On voit donc que f est la composée de la similitude g suivie de l'homothétie h de centre O et de rapport 2, d'écriture complexe $z' = 2z$. Donc $f = h \circ g$.

   (b) D'après la question précédente : $f = h \circ g$. Pour trouver l'image d'un point C par f :
   - on construit le symétrique C_1 de C par rapport à l'axe (OA) (car g est la symétrie d'axe (OA))
   - puis l'image C' de C_1 par l'homothétie de centre O et de rapport 2.

   (voir annexe pour la figure)

Exercice 3 :

1. Soient M, N, P et Q quatre points tels que $M \neq N$ et $P \neq Q$ ainsi que leurs images respectives M', N', P' et Q' par une similitude indirecte s. L'écriture complexe de s est $z' = a\overline{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{M'N'}\,;\,\overrightarrow{P'Q'}) &\equiv (\overrightarrow{M'N'}\,;\,\overrightarrow{M'Q'}) + (\overrightarrow{M'Q'}\,;\,\overrightarrow{P'Q'})\ [2\pi]\\ &\equiv (\overrightarrow{M'N'}\,;\,\overrightarrow{M'Q'}) + (\overrightarrow{Q'M'}\,;\,\overrightarrow{Q'P'})\ [2\pi]\end{aligned}$$

D'après la propriété 2 du rappel, $(\overrightarrow{M'N'}\,;\,\overrightarrow{M'Q'}) \equiv \arg\left(\dfrac{z_{Q'} - z_{M'}}{z_{N'} - z_{M'}}\right)\ [2\pi]$. Or,

$$\frac{z_{Q'} - z_{M'}}{z_{N'} - z_{M'}} = \frac{a\overline{z_Q} + b - (a\overline{z_M} + b)}{a\overline{z_N} + b - (a\overline{z_M} + n)} = \frac{a\left(\overline{z_Q - z_M}\right)}{a\left(\overline{z_N - z_M}\right)} = \overline{\left(\frac{z_Q - z_M}{z_N - z_M}\right)}$$

Ainsi, $(\overrightarrow{M'N'}\,;\,\overrightarrow{M'Q'}) \equiv \arg\left(\overline{\left(\dfrac{z_Q - z_M}{z_N - z_M}\right)}\right)\ [2\pi]$ donc $(\overrightarrow{M'N'}\,;\,\overrightarrow{M'Q'}) \equiv -\arg\left(\dfrac{z_Q - z_M}{z_N - z_M}\right)\ [2\pi]$.

Or, $\arg\left(\dfrac{z_Q - z_M}{z_N - z_M}\right) \equiv (\overrightarrow{MN}\,;\,\overrightarrow{MQ})\ [2\pi]$ d'où $(\overrightarrow{M'N'}\,;\,\overrightarrow{M'Q'}) \equiv -(\overrightarrow{MN}\,;\,\overrightarrow{MQ})\ [2\pi]$.

On montre de même que $(\overrightarrow{Q'M'}\,;\,\overrightarrow{Q'P'}) \equiv -(\overrightarrow{QM}\,;\,\overrightarrow{QP})\ [2\pi]$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{M'N'}\,;\,\overrightarrow{P'Q'}) &\equiv -(\overrightarrow{MN}\,;\,\overrightarrow{MQ}) - (\overrightarrow{QM}\,;\,\overrightarrow{QP})\ [2\pi]\\ &\equiv -\left[(\overrightarrow{MN}\,;\,\overrightarrow{MQ}) + (\overrightarrow{MQ}\,;\,\overrightarrow{PQ})\right]\ [2\pi]\\ &\equiv -(\overrightarrow{MN}\,;\,\overrightarrow{PQ})\ [2\pi]\end{aligned}$$

On a ainsi justifié qu'une similitude indirecte transforme un angle orienté en son opposé.

2. (a) voir figure en fin d'exercice

   (b) La similitude S_1 transforme un nombre complexe z en son conjugué donc l'écriture complexe de S_1 est $z' = \overline{z}$.

3. (a) Comme C_1 et D_1 sont deux points distincts et que C' et D' sont aussi deux points distincts, on sait qu'il existe une unique similitude directe S_2 qui transforme C_1 en C' et D_1 en D'. Pour justifier que son écriture complexe est $z' = iz + 1 + i$, il suffit alors de vérifier que par cette similitude directe (car du type $z' = az + b$ avec $a = i \in \mathbb{C}^*$ et $b = 1 + i \in \mathbb{C}$) dont on nous donne une écriture complexe, l'image de C_1 est C' et l'image de D_1 est D'. Or, $iz_{C_1} + 1 + i = i\overline{c} + 1 + i = 3i + 1 + i = 1 + 4i = c' = z_{C'}$ et

$$iz_{D_1} + 1 + i = i\overline{d} + 1 + i = i(1 + 3i) + 1 + i = i - 3 + 1 + i = -2 + 2i = d' = z_{D'}$$

   S_2 a effectivement pour écriture complexe $z' = iz + 1 + i$.

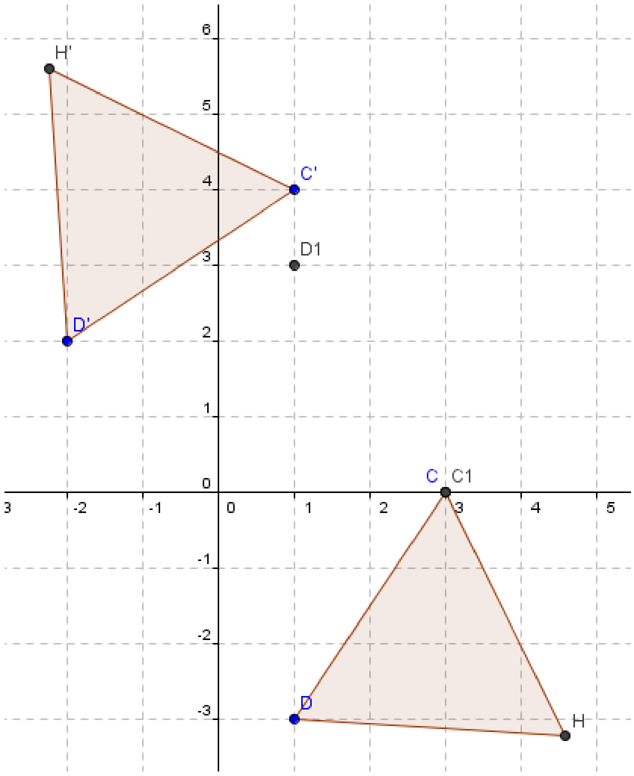
   (b) Le rapport de la similitude S_2 est $|a| = |i| = 1$, son angle est $\arg(a) = \arg(i) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Son centre Ω a pour affixe $\omega = \dfrac{b}{1 - a} = \dfrac{1 + i}{1 - i} = \dfrac{(1 + i)^2}{1 + 1} = \dfrac{1 + 2i - 1}{2} = i$.

4. L'écriture complexe de $S_2 \circ S_1$ est $z \mapsto \overline{z} \mapsto i\overline{z} + 1 + i$ c'est-à-dire $z' = i\overline{z} + 1 + i$.

5. (a) $S(C) = S_2(S_1(C)) = S_2(C_1) = C'$ d'après les questions précédentes.
   De même, $S(D) = S_2(S_1(D)) = S_2(D_1) = D'$.

   (b) $CH = |h - c| = |e^{i\frac{\pi}{3}}(d - c)| = |e^{i\frac{\pi}{3}}| \times |d - c| = 1 \times CD$. Comme $CH = CD$, CDH est isocèle en C. En outre, $\left(\overrightarrow{CD}\,;\,\overrightarrow{CH}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{h - c}{h - d}\right)\ [2\pi]$. Or, $\dfrac{h - c}{h - d} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $\arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Ainsi, $\left(\overrightarrow{CD}\,;\,\overrightarrow{CH}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Le triangle CDH est isocèle avec un angle égal à $\dfrac{\pi}{3}$ donc il est équilatéral. De plus, $\left(\overrightarrow{CD}\,;\,\overrightarrow{CH}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$ donc CDH est équilatéral direct.

(c) S est une similitude indirecte puisque son écriture complexe est du type $z' = a\overline{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. Comme une similitude indirecte conserve les rapports entre les longueurs et transforment un angle orienté en son opposé, alors l'image $C'D'H'$ du triangle équilatéral direct CDH par S est un triangle équilatéral indirect. Connaissant C' et D' on peut alors placer H' avec cette information.



Exercice 4 :

1. (a) $z_{\overrightarrow{BC}} = c - b = 10 - 5i = 5(2 - i)$ et $z_{\overrightarrow{BH}} = h - b = 2 + 4i - 5i = 2 - i$. On remarque que $z_{\overrightarrow{BC}} = 5z_{\overrightarrow{BH}}$ donc $\overrightarrow{BC} = 5\overrightarrow{BH}$. Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont alors colinéaires et les points B, C et H alignés. Autrement dit, $H \in (BC)$.

   (b)

$$\frac{h}{h-c} = \frac{2+4\mathrm{i}}{2+4\mathrm{i}-10} = \frac{2(1+2\mathrm{i})}{-8+4\mathrm{i}} = \frac{1+2\mathrm{i}}{-4+2\mathrm{i}} = \frac{(1+2\mathrm{i})(-4-2\mathrm{i})}{16+4} = \frac{-4-2\mathrm{i}-8\mathrm{i}+4}{20} = \frac{1}{2}\times(-\mathrm{i})$$

On sait que $\left(\overrightarrow{HC}\,;\,\overrightarrow{HA}\right) \equiv \arg\left(\frac{h-a}{h-c}\right)$ $[2\pi]$ avec $a = 0$ car A est l'origine du repère. Comme $\frac{h}{h-c} = \frac{1}{2} \times (-\mathrm{i})$ alors $\left(\overrightarrow{HC}\,;\,\overrightarrow{HA}\right) \equiv \arg\left(\frac{1}{2} \times (-\mathrm{i})\right)$ $[2\pi]$ et par conséquent, $\left(\overrightarrow{HC}\,;\,\overrightarrow{HA}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ car $\frac{1}{2} \times (-\mathrm{i})$ est un imaginaire pur de partie imaginaire négative.

2. (a) $\frac{BH}{AH} = \frac{|h-b|}{|h-a|} = \frac{|2-i|}{|2+4i|} = \frac{\sqrt{4+1}}{\sqrt{4+16}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$; $\frac{BA}{AC} = \frac{|b|}{|c|} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$;

$\frac{AH}{CH} = \frac{|h|}{|h-c|} = \frac{|2+4i|}{|2+4i-10|} = \frac{\sqrt{4+16}}{\sqrt{64+16}} = \frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$

   (b) On considère la similitude directe S_1 de centre H, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. On a vu que $\frac{AH}{CH} = \frac{1}{2}$ et que $\left(\overrightarrow{HC}\,;\,\overrightarrow{HA}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$. Cela signifie (définition géométrique d'une similitude à centre) que $S_1(C) = A$.

De plus, $\frac{BH}{AH} = \frac{1}{2}$ et $\left(\overrightarrow{HA}\,;\,\overrightarrow{HB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{HA}\,;\,\overrightarrow{HC}\right) + \left(\overrightarrow{HC}\,;\,\overrightarrow{HB}\right)$ $[2\pi]$.

Or, $\left(\overrightarrow{HA}\,;\,\overrightarrow{HC}\right) \equiv -\left(\overrightarrow{HC}\,;\,\overrightarrow{HA}\right)$ $[2\pi]$ soit $\left(\overrightarrow{HA}\,;\,\overrightarrow{HC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{HC}\,;\,\overrightarrow{HB}\right) \equiv -\pi$ $[2\pi]$ puisque $H \in (BC)$. Finalement, $\left(\overrightarrow{HA}\,;\,\overrightarrow{HB}\right) \equiv \frac{\pi}{2} - \pi$ $[2\pi]$ d'où $\left(\overrightarrow{HA}\,;\,\overrightarrow{HB}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$. On retrouve l'angle de la similitude S_1, on peut alors en déduire que $S_1(A) = B$. On sait enfin que $S_1(H) = H$ donc l'image par S_1 du triangle CHA est le triangle AHB.

(c) On sait que l'écriture complexe de cette similitude est, z étant l'affixe d'un point M et z' celle de son image par S_1 est

$$z'-z_{\mathrm{H}} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\left(z - z_{\mathrm{H}}\right) \Leftrightarrow z' = 2+4\mathrm{i}-\frac{1}{2}\mathrm{i}(z-2-4\mathrm{i}) \Leftrightarrow z' = 2+4\mathrm{i}-\frac{1}{2}\mathrm{i}z+\mathrm{i}-2 \Leftrightarrow z' = -\frac{1}{2}\mathrm{i}z+5\mathrm{i}.$$

Comme précisé à la question précédente, S_1 a pour rapport $\frac{1}{2}$, pour angle $-\frac{\pi}{2}$ et pour centre H.

3. Si $\Omega \in (\Delta)$, alors Ω est invariant par la symétrie orthogonale d'axe (Δ) et par la similitude directe donc Ω est un point fixe pour S_2. Cherchons le(s) point(s) fixe(s) de cette similitude. Avec $z = x + \mathrm{i}y$,

$$\begin{aligned} z' = x' + \mathrm{i}y' = x + \mathrm{i}y = (-1-2\mathrm{i})(x - \mathrm{i}y) + 10 &\iff x + iy = -x + \mathrm{i}y - 2\mathrm{i}x - 2y + 10 \\ &\iff \begin{cases} x &= -x - 2y + 10 \\ y &= -2x + y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x &= -2y + 10 \\ 2x &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y &= 5 \\ x &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Le seul point fixe a pour affixe 5i : c'est B. S_2 doit donc être la composée d'une symétrie orthogonale d'axe (Δ) contenant B et d'une similitude de centre B. Une symétrie orthogonale a une écriture complexe de la forme $z' = \alpha\overline{z} + \beta$ avec $|\alpha| = 1$ puisque c'est une isométrie Or B est invariant par cette symétrie : $5\mathrm{i} = \alpha 5\mathrm{i} + \beta \iff \beta = 5\mathrm{i}(\alpha + 1)$. L'écriture complexe de la symétrie est donc : $z' = \alpha\overline{z} + 5\mathrm{i}(\alpha + 1)$. En posant $\alpha = a + \mathrm{i}b$, (avec $a^2 + b^2 = 1$), les points $M(x\,;\,y)$ invariants par cette symétrie vérifient : $x + \mathrm{i}y = (a + \mathrm{i}b)(x - \mathrm{i}y) + 5\mathrm{i}(1 + a + \mathrm{i}b)$, d'où

$$\begin{cases} x &= ax + by - 5b \\ y &= -ay + bx + 5(1+a) \end{cases} \iff \begin{cases} x(a-1) + by - 5b &= 0 \\ bx - y(a+1) + 5(1+a) &= 0 \end{cases}$$

Ces deux équations sont deux équations d'une même droite (Δ) : elles contiennent toutes les deux le point $\mathrm{B}(0\,;\,5)$ et :

– si $a \neq 1$ (et donc $b \neq 0$), elles coupent respectivement l'axe des abscisses en $x = -\frac{5b}{1-a}$ et $x = -\frac{5(a+1)}{b}$. Or $-\frac{5b}{1-a} = -\frac{5b(1+a)}{(1+a)(1-a)} = -\frac{5b(1+a)}{1-a^2} = -\frac{5b(1+a)}{b^2} = -\frac{5(1+a)}{b}$.

– si $a = 1$, alors $b = 0$ et il s'agit de la droite d'équation $y = 5$.

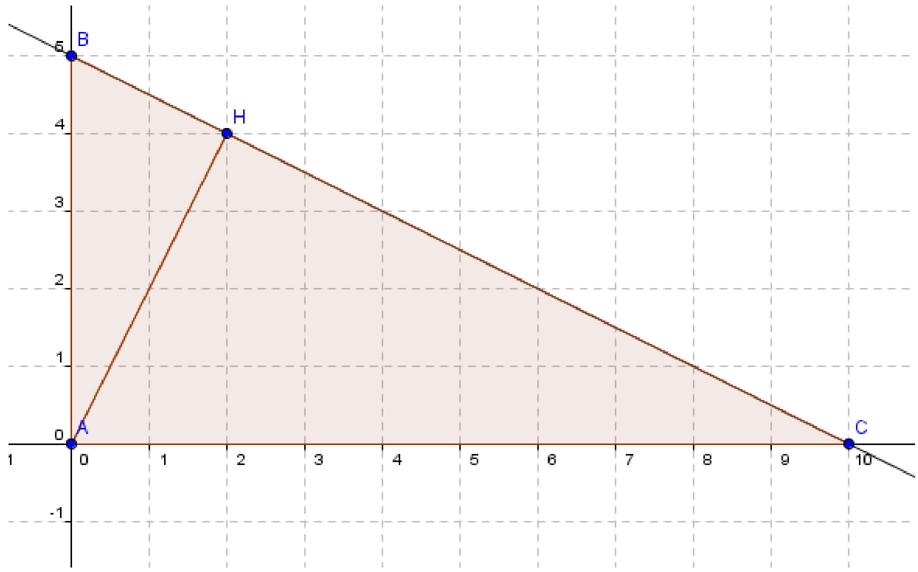
On peut trouver ainsi de nombreuses symétries orthogonales qui conviennent avec le choix de a et b.

4. (a) Le rapport de la similitude S_1 est $\frac{1}{2}$ et celui de S_2 est $|-1-2i| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$. Le rapport de la similitude $S_2 \circ S_1$ est égal au produit des rapports des deux similitudes, soit $\sqrt{5} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

(b) On a vu à la question 3 que $S_2(B) = B$ donc $(S_2 \circ S_1)(A) = S_2(B) = B$.
L'image de A par S_2 a pour affixe $(-1-2i) \times 0 + 10 = 10 = c$ donc $S_2(A) = C$ et $(S_2 \circ S_1)(C) = S_2(A) = C$.
L'image de H par S_2 a pour affixe

$$(-1-2i) \times \overline{(2+4i)} + 10 = (-1-2i)(2-4i) + 10 = -2 + 4i - 4i - 8 + 10 = 0 = z_A$$

donc $S_2(H) = A$ et $(S_2 \circ S_1)(H) = S_2(H) = A$. L'image du triangle CHA par la similitude $S_2 \circ S_1$ est le triangle BAC. Dans une similitude les aires sont multipliées par le carré du rapport de similitude soit ici $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4} = 1,25$. Plus précisément, $\dfrac{\mathcal{A}_{BAC}}{\mathcal{A}_{CHA}} = 1,25$.



Exercice 5 :

1. L'écriture complexe d'une symétrie axiale (antidéplacement) est de la forme $z' = a\overline{z} + b$. A et B invariants par cette symétrie se traduit par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 1 & = & a \times 1 + b \\ \mathrm{i} & = & a \times (-\mathrm{i}) + b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 1 & = & a + b \\ \mathrm{i} & = & -a(\mathrm{i}) + b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 1 & = & a + b \\ 1 - \mathrm{i} & = & a(1 + \mathrm{i}) \end{array}\right. \quad \text{(par différence)}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} & = & a \\ 1 & = & a + b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{-2\mathrm{i}}{2} & = & a \\ 1 & = & a + b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} -\mathrm{i} & = & a \\ 1 + \mathrm{i} & = & b \end{array}\right.$$

   L'écriture complexe est donc : $z' = -\mathrm{i}\overline{z} + 1 + \mathrm{i}$.

2. Le point $M' = H(M)$ est défini par $\overrightarrow{AM'} = -2\overrightarrow{AM}$ ce qui correspond pour l'écriture complexe a : $z' - 1 = -2(z - 1)$ soit $z' = -2z + 3$.

3. $f = H \circ S$.
   (a) La réflexion S est une similitude de centre A ; donc la composée de deux similitudes de même centre est une similitude de même centre A.
   (b) Écriture complexe :
      – pour S, on a vu que l'écriture complexe est : $z' = -\mathrm{i}\overline{z} + 1 + \mathrm{i}$.
      – pour H : $z'' = -2z' + 3$
      – donc $z" = -2\left(-\mathrm{i}\overline{z} + 1 + \mathrm{i}\right) + 3 = 2\mathrm{i}\overline{z} + 1 - 2\mathrm{i}$.

4. (a) $\overrightarrow{AM''} = 2\overrightarrow{AM}$ signifie que $f(M) = H(M)$ ou encore que

$$(H \circ S)(M) = H(M) \;\Leftrightarrow\; (H^{-1} \circ H \circ S)(M) = (H^{-1} \circ H)(M) \;\Leftrightarrow\; s(M) = M$$

   avec H^{-1} la similitude réciproque de H (donc ici l'homothétie de centre A et de rapport $-\dfrac{1}{2}$.). L'ensemble des points M cherché est l'ensemble des points invariants par S, c'est-à-dire la droite (AB).

   (b) $\overrightarrow{AM''} = 2\overrightarrow{AM} \iff z'' - 1 = 2(z - 1) \iff 2\mathrm{i}\overline{z} - 2\mathrm{i} = 2z - 2 \iff 2\mathrm{i}\overline{z} - 2z = -2 + 2\mathrm{i}$.
   Si $M(x\ ;\ y)$, alors l'équation précédenet équivaut à

$$2i(x - iy) - 2(x + iy) = -2 + 2i \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{lcl} 2y - 2x & = & -2 \\ 2x - 2y & = & 2 \end{array}\right.$$

Les points $M(x\ ;\ y)$ sont tels que $x-y=1$ qui est l'équation d'une droite perpendiculaire à (AB) (coefficient directeur 1, alors que celui de (AB) est -1), et qui contient le point A (le couple $(1\ ;\ 0)$ vérifie l'équation). Inversement un point M de la perpendiculaire trouvée a pour coordonnées $(x\ ;\ x-1)$. On vérifie que $z''-1=2\mathrm{i}x+2x-2-2\mathrm{i}$ et que $2(z-1)=2\mathrm{i}x+2x-2-2\mathrm{i}$. L'ensemble cherché est donc toute la perpendiculaire à (AB) contenant A.

Exercice 6 :

1. Soit σ la similitude directe de centre A qui transforme C en H.
   Le rapport de cette similitude est

$$\lambda=\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AC}}=\frac{|z_{\mathrm{H}}-z_{\mathrm{A}}|}{|z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{A}}|}=\frac{|6\mathrm{i}|}{8-8\mathrm{i}|}=\frac{6i}{8(1-i)}=\frac{6}{8\sqrt{2}}=\frac{3}{4\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$$

   Un angle de cette similitude est : $\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AH}}\right)\equiv\arg\left(\frac{z_{\mathrm{H}}-z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{A}}}\right)\ [2\pi]$. Or,

$$\begin{aligned}\frac{z_{\mathrm{H}}-z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{A}}}&=\frac{-6\mathrm{i}}{8-8\mathrm{i}}=-\frac{6}{8}\times\frac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=-\frac{3}{4}\times\frac{i(1+i)}{2}=-\frac{3}{8}\times(-1+\mathrm{i})=\frac{3}{8}(1-i)\\&=\frac{3}{8}\left(\cos(-\frac{\pi}{4})+\mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{4})\right)\end{aligned}$$

   Ainsi, $\arg\left(\frac{3}{8}(\cos(-\frac{\pi}{4})+\mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{4}))\right)\equiv-\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ soit $\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AH}}\right)\equiv-\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ Finalement, σ est la similutude directe de centre A, de rapport $\frac{3\sqrt{2}}{8}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

2. (a) s a pour écriture complexe $z'=a\overline{z}+b$.
   A et C sont invariants donc on a le système : $\begin{cases}z_{\mathrm{A}}&=&a\overline{z_{\mathrm{A}}}+b\\z_{\mathrm{C}}&=&a\overline{z_{\mathrm{C}}}+b\end{cases}$.
   En soustrayant membre à membre, il vient : $z_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{C}}=a\left(\overline{z_{\mathrm{A}}}-\overline{z_{\mathrm{C}}}\right)$ donc

$$a=\frac{z_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{C}}}{\overline{z_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{C}}}}=\frac{-8+8\mathrm{i}}{-8-8\mathrm{i}}=\frac{-1+\mathrm{i}}{-1-\mathrm{i}}=\frac{(-1+i)(-1+i)}{2}=\frac{-1-2i+1}{2}=\mathrm{i}$$

   $b=z_{\mathrm{A}}-a\overline{z_{\mathrm{A}}}=-5+6\mathrm{i}+\mathrm{i}(-5-6\mathrm{i})=-5+6\mathrm{i}-5\mathrm{i}+6=1+\mathrm{i}$
   s a pour écriture complexe : $z'=-\mathrm{i}\overline{z}+1+\mathrm{i}$.
   s n'est pas l'identité et est une similitude indirecte ayant deux points invariants : c'est une symétrie axiale, d'axe (AC).

   (b) E est le symétrique de H par rapport à la droite (AC), donc E est l'image de H par s.
   $z_{\mathrm{E}}=-\mathrm{i}\overline{z_{\mathrm{H}}}+1+\mathrm{i}=-\mathrm{i}(-5)+1+\mathrm{i}=1+6\mathrm{i}$

   (c) Le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC est

$$\mathrm{FA}=|z_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{F}}|=|-5+6\mathrm{i}+2-\mathrm{i}|=|-3+5\mathrm{i}|=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$$

   $\mathrm{FE}=|z_{\mathrm{E}}-z_{\mathrm{F}}|=|1+6\mathrm{i}+2-\mathrm{i}|=|3+5\mathrm{i}|=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$.
   FE=FA donc E appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.
   (*Remarque : H est en fait l'orthocentre du triangle ABC et on a vérifié une propriété générale dans un triangle disant que le symétrique de l'orthocentre d'un triangle par rapport à un côté de ce triangle appartient au cercle circonscrit*)

3. I est le milieu de [AC]. L'affixe de I est $z_{\mathrm{I}}=\frac{z_{\mathrm{A}}+z_{\mathrm{C}}}{2}=\frac{-5+6\mathrm{i}+3-2\mathrm{i}}{2}=\frac{-2+4\mathrm{i}}{2}=-1+2\mathrm{i}$.
   G est l'image de I par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{2}{3}$. *(par conséquent, G est le centre de gravité du triangle, puisque l'on sait que celui-ci est aux deux tiers de chaque médiane en partant du sommet).*

Cette homothétie a pour écriture complexe $z' - z_B = \frac{2}{3}(z - z_B)$ donc $z = \frac{2}{3}(z + 7 + 2i) - 7 - 2i$. Avec $z = z_I$, on obtient

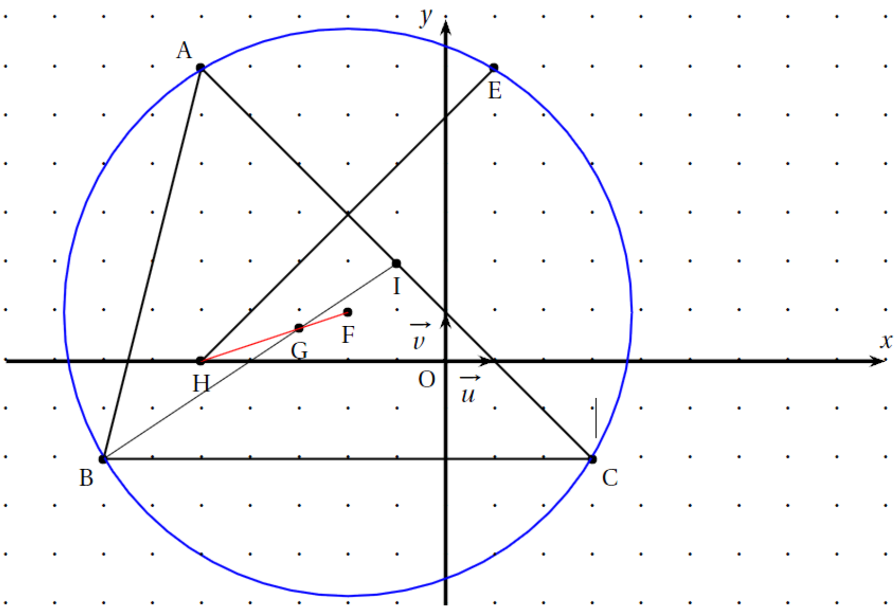
$$z_G = \frac{2}{3}(-1 + 2i + 7 + 2i) - 7 - 2i = \frac{2}{3}(6 + 4i) - 7 - 2i = 4 + \frac{8}{3}i - 7 - 2i = -3 + \frac{2}{3}i$$

Le vecteur $\overrightarrow{HG}$ a pour affixe $z_G - z_H = -3 + \frac{2}{3}i + 5 = 2 + \frac{2}{3}i$.

Le vecteur $\overrightarrow{HF}$ a pour affixe $z_F - z_H = -2 + i + 5 = 3 + i = \frac{3}{2}\left(2 + \frac{2}{3}i\right) = \frac{3}{2}z_{\overrightarrow{HG}}$.

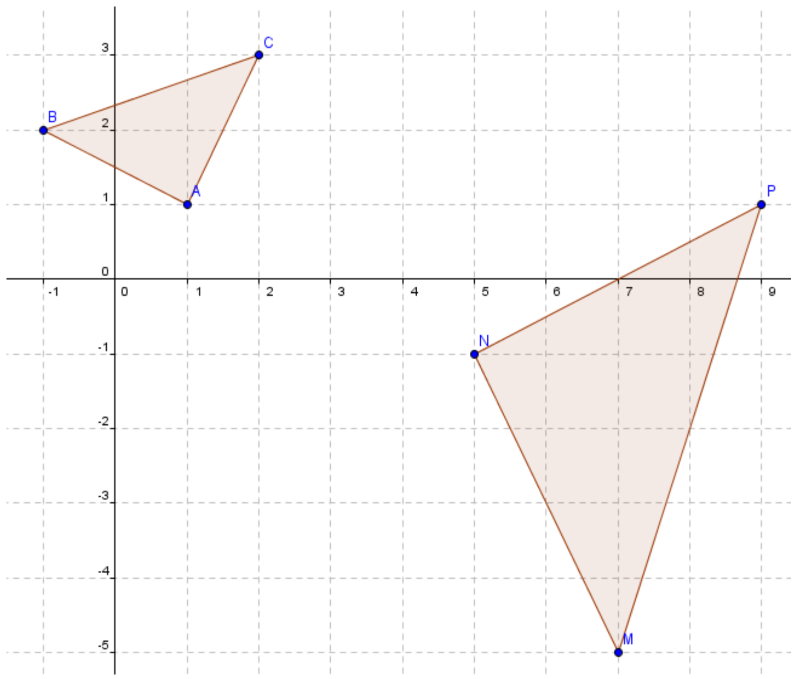
Comme $\overrightarrow{HF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{HG}$, les vecteurs $\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{HF}$ sont donc colinéaires : les points H, G et F sont donc colinéaires.

(remarque : on a remontré dans un cas particulier que dans un triangle non équilatéral, le centre du cercle circonscrit, le centre de gravitéäet l'othocentre d'un triangle sont alignés sur une droite appelée droite d'Euler.)



Exercice 7 :

1. (a)



(b) Triangle ABC :

$$\begin{aligned}AB = |b-a| = |-1+2i-1-i| = |-2+i| = \sqrt{(-2)^2+1^2} = \sqrt{5}\\ AC = |c-a| = |2+3i-1-i| = |1+2i| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}\\ BC = |c-b| = |2+3i+1-2i| = |3+i| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}\end{aligned}$$

Triangle MNP :

$$\begin{aligned}MN = |n-m| = |5+i-7+5i| = |-2+4i| = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}\\ MP = |p-m| = |9+i-7+5i| = |2+6i| = \sqrt{4+36} = 2\sqrt{10}\\ NP = |p-n| = |9+i-5+i| = |4+2i| = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

(c) Les longueurs des cotés des deux triangles sont proportionnels : $NP = 2AB$, $MP = 2BC$ et $MN = 2AC$. Cela signifie que les triangles ABC et MNP sont semblables.

2. (a) D'après le cours, il exsite une unique similitude directe qui transforme A en N et B en P puisque A et B sont distincts, ainsi que N et P. Comme la transformation d'écriture complexe $z' = \left(-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i\right)+\frac{23}{5}+\frac{9}{5}i$ est une similitude directe (car son écriture complexe est du type $z' = az+b$ avec $a = -\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i \in \mathbb{C}^*$ et $b = \frac{23}{5}+\frac{9}{5}i \in \mathbb{C}$), il suffit de vérifier que par cette transformation, l'image de A est N et celle de B est P.

$$\begin{aligned}z_A{}' &= \left(-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i\right)z_A+\frac{23}{5}+\frac{9}{5}i = \left(-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i\right)(1+i)+\frac{23}{5}+\frac{9}{5}i\\ &= -\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i-\frac{6}{5}i+\frac{8}{5}+\frac{23}{5}+\frac{9}{5}i = \frac{25}{5}-\frac{5}{5}i = 5-i = n\end{aligned}$$

On en déduit que $s(A) = N$.

$$\begin{aligned}z_B{}' &= \left(-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i\right)z_B+\frac{23}{5}+\frac{9}{5}i = \left(-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i\right)(-1+2i)+\frac{23}{5}+\frac{9}{5}i\\ &= \frac{6}{5}+\frac{8}{5}i-\frac{12}{5}i+\frac{16}{5}+\frac{23}{5}+\frac{9}{5}i = \frac{45}{5}+\frac{5}{5}i = 9+i = p\end{aligned}$$

On en déduit que $s(B) = P$.

(b) Le rapport de la similitude est $\lambda = \frac{NP}{AB} = 2$ d'après la question 1.
L'angle de la similitude est $\theta = \arg(a) = \arg\left(-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i\right)$. Or, $a = 2\left(-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right)$ donc $\cos(\theta) = -\frac{3}{5}$ et $\sin(\theta) = -\frac{4}{5}$ avec $\theta \in [-180° ; -90°]$.
Ainsi, $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) - 180° \simeq 53 - 180°$ donc $\theta \simeq -127°$.
L'affixe du centre de la similitude s est

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{b}{1-a} = \frac{\frac{23}{5}+\frac{9}{5}i}{1+\frac{6}{5}+\frac{8}{5}i} = \frac{23+9i}{11+8i} = \frac{(23+9i)(11-8i)}{11^2+8^2} = \frac{253-184i+99i+72}{121+64} = \frac{325-85i}{185}\\ &= \frac{65}{37}-\frac{17}{37}i\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}s'_C &= \left(-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i\right)c+\frac{23}{5}+\frac{9}{5}i = \left(-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i\right)(2+3i)+\frac{23}{5}+\frac{9}{5}i\\ &= -\frac{12}{5}-\frac{18}{5}i-\frac{16}{5}i+\frac{24}{5}+\frac{23}{5}+\frac{9}{5}i = \frac{35}{5}-\frac{25}{5}i = 7-5i = m\end{aligned}$$

On en déduit que $s(C) = M$.

3. (a) Pour $z = a$, $z' = 2i\overline{a} + 3 - 3i = 2i(1 - i) + 3 - 2i = 2i + 2 + 3 - 3i = 5 - i = n$ donc $s'(A) = N$.
Pour $z = b$, $z' = 2i\overline{b} + 3 - 3i = 2i(-1 - 2i) + 3 - 3i = -2i + 4 + 3 - 3i = 7 - 5i = m$ donc $s'(B) = M$.
Pour $z = c$, $z' = 2i\overline{c} + 3 - 3i = 2i(2 - 3i) + 3 - 3i = 4i + 6 + 3 - 3i = 9 + i = p$ donc $s'(C) = P$.

(b) On résout l'équation $(E) \quad z = 2i\overline{z} + 3 - 3i$ en posant $z = x + iy$ avec x et y réels. Alors

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad x + iy = 2i(x - iy) + 3 - 3i \Leftrightarrow x + iy = 2ix + 2y + 3 - 3i \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3 \\ y = 2(2y + 3) - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3 \\ y = 4y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(-1) + 3 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Le point K d'affixe $k = 1 - i$ est donc l'unique point invariant de s'.

(c) $h(K) = K$ car h est le centre de l'homothétie h et $s'(K) = K$ car K est le point fixe de s' donc $f(K) = s'(h(K)) = K$.
L'écriture complexe de l'homoéthétie h de centre K et de rapport $\frac{1}{2}$ est

$$z' - z_K = \frac{1}{2}(z - z_K) \Leftrightarrow z' = 1 - i + \frac{1}{2}(z - 1 + i) = 1 - i + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

L'affixe de $h(J)$ est est $z_{h(J)} = \frac{1}{2}z_J + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$. L'affixe de $f(J)$ est donc l'affixe de l'image de $h(J)$ par s' :

$$z_{f(J)} = 2i\overline{z_{h(J)}} + 3 * 3i = 2i\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right) + 3 - 3i = 3i - 1 + 3 - 3i = 2 = s_J$$

On peut alors conclure que $f(J) = J$. f est une similitude indirecte puisque c'est la composée de la similitude indirecte s' avec la similitude directe h. Elle admet deux points invariants K et J donc il s'agit de la réflexion d'axe (KJ).

(d) On sait que $f = s' \circ h$, donc en composant par l'homothétie réciproque de h (de centre K et de rapport 2), on obtient : $f \circ h^{-1} = s' \circ h \circ h^{-1}$ d'où $s' = f \circ h^{-1}$. Ainsi s' est la composée de l'homothétie h^{-1} et de la réflexion f.

Exercice 8 :

PARTIE A

1. L'écriture complexe d'une similitude directe est de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.
On résout le système $\begin{cases} z_O = az_A + b \\ z_B = az_O + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3ia + b = 0 \\ b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{6}{3i} = 2i \\ b = 6 \end{cases}$. L'unique similitude directe qui convient a pour écriture complexe $z' = 2iz + 6$.
Son rapport est $|a| = |2i| = 2$, son angle est $\arg(a) = \arg(2i) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ puisque $2i$ est un imaginaire pur de partie réelle positive.
Son centre a pour affixe $\omega = \frac{b}{1 - a} = \frac{6}{1 - 2i} = \frac{6(1 + 2i)}{1 + 4} = \frac{6}{5} + \frac{12}{5}i$.
2. L'écriture complexe d'une similitude directe est de la forme $z' = \alpha\overline{z} + \beta$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in \mathbb{C}$.
On résout le système $\begin{cases} z_O = \alpha\overline{z_A} + \beta \\ z_B = \alpha\overline{z_O} + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3i\alpha + \beta = 0 \\ \beta = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{6}{3i} = -2i \\ \beta = 6 \end{cases}$.
L'unique similitude directe qui convient a pour écriture complexe $z' = -2i\overline{z} + 6$.

PARTIE B

1. On résout l'équation $(E)\quad z=-2i\overline{z}+6$ en posant $x=x+iy$ avec x et y réels.

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad x+iy=-2i(x-iy)+6 \Leftrightarrow x+iy=-2ix-2y+6 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2y+6 \\ y=-2x \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x=4x+6 \\ y=-2x \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x=-6 \\ y=-2x \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2 \\ y=4 \end{array}\right.$$

L'unique point invariant de f est le point K d'affixe $z_K=-2+4i$

2. (a) g est la composée de deux similitudes donc c'est une similitude. Son rapport est le produit des rapports des similitudes qui la composent. f est de rapport 2 car c'est une similitude indirecte d'écriture complexe $z'=\alpha\overline{z}+\beta$ avec $\alpha=-2i$ et $\beta=6$ donc $|\alpha|=|-2i|=2$. Quant à h, c'est une similitude directe de rapport $\frac{1}{2}$. Ainsi, le rapport de g est $2\times\frac{1}{2}=1$. Cela implique que g est une isométrie. De plus, $g(K)=f(h(K))=f(K)$ car K est le centre de l'homothétie h et $f(K)=K$ d'après la question précédente d'où $g(K)=K$.

   (b) Soit M' l'image de M par h. Alors

$$z'=\frac{1}{2}(z-z_K)+z_K=\frac{1}{2}(z+2-4i)-2+4i=\frac{1}{2}z+1-2i-2+4i=\frac{1}{2}z-1+2i$$

   Soit M'' l'image de M' par f. Alors

$$z''=-2i\overline{z'}+6=-2i\overline{\left(\frac{1}{2}z-1+2i\right)}+6=-2i\left(\frac{1}{2}\overline{z}-1-2i\right)+6=-i\overline{z}+2i-4+6=-i\overline{z}+2+2i$$

   On retrouve l'écriture complexe donnée dans l'énoncé.

   (c) Un point de l'axe $(O\,;\,\vec{v})$ a une affixe du type $z=yi$ avec $y\in\mathbb{R}$. Il s'agit de l'affixe d'un point invariant de g si et seulement si :

$$z''=z \Leftrightarrow iy=-i\overline{iy}+2+2i \Leftrightarrow iy=-i(-iy)+2+2i \Leftrightarrow iy=-y+2+2i \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2+y=0 \\ y=2 \end{array}\right.$$

   On trouve ainsi un unique point de l'axe $(O\,,\,\vec{v})$ invariant par g, il s'agit du point L d'affixe $z_L=2i$.
   On a justifié que g est une similitude qui admet deux points fixes distincts : K et L. C'est donc soit l'identité, soit une symétrie. D'après son écriture complexe, ce n'est pas l'identité, donc g est la symétrie d'axe (KL) (les points invariants se trouvent sur l'axe de la symétrie).

   (d) Comme $g=f\circ h$, alors $g\circ h^{-1}=f\circ h\circ h^{-1}=f$. Si on pose $h'=h^{-1}$, alors h' est une homothétie de rapport inverse à celui de h c'est-à-dire de rapport 2 et de même centre que h, c'est-à-dire K. Ainsi, f est la composée de l'homothétie h' suivie de la symétrie g d'axe (KL).

3. Comme f est une similitude, $f(\Delta)$ est une droite. L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle. En effet, si $h'(M)=M'$ et $h'(N)=N'$. Alors $(\overrightarrow{MN}\,;\,\overrightarrow{M'N'})$ correspond à l'angle de la similitude h', c'est-à-dire 0 puisque le rapport de h' (qui vaut 2) est un nombre positif. Cela signifie que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{M'N'}$ sont colinéaires donc les droites (MN) et $(M'N')$ sont parallèles. Ainsi, $h'(\Delta)$ est une droite parallèle à Δ.
Or, $f(\Delta)=(g\circ h')(\Delta)=g\left(h'(\Delta)\right)$. L'image par la symétrie axiale g de $h'(\Delta)$ est une droite. Elle sera parallèle à $h'(\Delta)$ et donc à Δ si et seulement si l'axe de la symétrie, ici (KL) est parallèle à Δ.

Exercice 9 :

1. (a) L'écriture complexe de s_1 est $z' = a\overline{z} + b$ avec $a \in \mathbb{R}, a \neq 0,\ b \in \mathbb{R}$.
Les deux points A et B sont invariants par s_1 ce qui se traduit par : $\begin{cases} 2+\mathrm{i} &= a(2-\mathrm{i})+b \\ 5+2\mathrm{i} &= a(5-2\mathrm{i})+b \end{cases}$
d'où (par différence)
$$3+\mathrm{i} = a(3-\mathrm{i}) \iff a = \frac{3+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}} \iff a = \frac{(3+\mathrm{i})^2}{(3+\mathrm{i})(3-\mathrm{i})} = \frac{8+6\mathrm{i}}{10} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}\mathrm{i}$$
En reportant dans la première équation :
$$b = 2+\mathrm{i} - (2-\mathrm{i})\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\mathrm{i}\right) = 2 + \mathrm{i} - \frac{8}{5} - \frac{3}{5} - \frac{6}{5}\mathrm{i} + \frac{4}{5}\mathrm{i} = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\mathrm{i}$$
(b) On a $z_{\mathrm{C}'} = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\mathrm{i}\right) \times (-\mathrm{i}) - \frac{1}{5} + \frac{3}{5}\mathrm{i} = -\frac{4}{5}\mathrm{i} + \frac{3}{5} - \frac{1}{5} + \frac{3}{5}\mathrm{i} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}\mathrm{i}$.
(c) Soit $M(x\ ;\ y)$ un point du plan avec $x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$. On a $z = x + \mathrm{i}y$ et
$z' = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\mathrm{i}\right)(x - \mathrm{i}y) - \frac{1}{5} + \frac{3}{5}\mathrm{i}$. Ce nombre est imaginaire pur si sa partie réelle est nulle soit $\frac{4}{5}x - \frac{1}{5} + \frac{3}{5}y = 0 \iff 4x - 1 + 3y = 0 \iff 4x + 3y = 1$.
L'ensemble des points M tels que z' est imaginaire pur est donc la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $4x + 3y = 1$.
(d) $\mathrm{C}'\left(\frac{2}{5}\ ;\ -\frac{1}{5}\right) \in \mathcal{D} \iff 4 \times \left(\frac{2}{5}\right) + 3 \times \left(-\frac{1}{5}\right) = 1 \iff \frac{8-3}{5} = 1$ qui est vraie.
Le point C' appartient donc à la droite $(\mathcal{D})$.

2. (a) Équation cartésienne de la droite (AB) : $M(x\ ;\ y) \in (\mathrm{AB}) \iff y = \alpha x + \beta$; en particulier :
$\begin{cases} 1 &= 2\alpha + \beta \\ 2 &= 5\alpha + \beta \end{cases}$ d'où $1 = 3\alpha \iff \alpha = \frac{1}{3}$; d'où $\beta = 1 - 2\alpha = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.
$M(x\ ;\ y) \in (\mathrm{AB}) \iff y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ et $M(x\ ;\ y) \in (\mathcal{D}) \iff 4x + 3y = 1$.
Donc un point Ω d'abscisse x est commun aux deux droites si et seulement si
$$4x + 3\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right) = 1 \iff 4x + x + 1 = 1 \iff 5x = 0 \iff x = 0$$
d'où $y = \frac{1}{3}$. L'affixe de Ω est donc $\omega = \frac{1}{3}\mathrm{i}$.
(b) Les symétries axiales s_1 et s_2 sont des antidéplacements (similitudes indirectes de rapport -1). Leur composée est une similitude directe dont le rapport est le produit des raports des deux similitudes, donc égal à 1. C'est donc un déplacement
(c) L'image de C par s_1 est C' et comme on vient de démontrer que C' appartient donc à la droite $(\mathcal{D})$ il est invariant par s_2. Ainsi, $f(\mathrm{C}) = \mathrm{C}'$.
Ω appartient à (AB), donc $s_1(\Omega) = \Omega$, mais Ω appartient aussi à $\mathcal{D}$, donc $s_2(\Omega) = \Omega$.
Conclusion $f(\Omega) = \Omega$.
(d) f est une similitude directe de rapport 1. Ce n'est ni l'identité (car $f(C) \neq C$), ni une translation (Ω est un point invariant), c'est donc une rotation de centre Ω puisque ce point est invariant par f.

3. (a) Le couple $(1\ ;\ -1)$ est solution évidente de l'équation $(4 \times 1 + 3 \times (-1) = 1 \quad (1))$.
Si $(x\ ;\ y)$ est une solution de l'équation on a $4x + 3y = 1 \quad (2)$; on a donc par différence (2) - (1) : $4(x-1) + 3(y+1) = 0 \iff 4(x-1) = -3(y+1) \quad (3)$.
4 divise donc $-3(y+1)$, mais comme il est premier avec -3 il divise $y+1$ d'après le théorème de Gauss. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y + 1 = 4k \iff y = -1 + 4k$.
En remplaçant dans (3), $4(x-1) = -3 \times 4k \iff x - 1 = -3k \iff x = 1 - 3k$.
Les solutions de l'équation $4x + 3y = 1$ sont tous les couples de la forme $(1 - 3k\ ;\ -1 + 4k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Inversement $4(1-3k) + 3(-1-4k) = 4 - 12k - 3 - 12k = 1$ montre qu'un couple de la forme $(1 - 3k\ ;\ -1 + 4k)$ est solution de l'équation proposée.

(b) Les points de $(\mathcal{D})$ à coordonnées entières sont donc les points de coordonnées $(1-3k\ ;\ -1+4k), k \in \mathbb{Z}$. Les points M situé à moins de 9 de O sont tels que

$$\begin{aligned}
OM < 9 &\iff \mathrm{O}M^2 < 81 \iff x^2+y^2 < 81 \iff (1-3k)^2 + (-1+4k)^2 < 81 \\
&\iff 1+9k^2-6k+1+16k^2-8k < 81 \iff 25k^2-14k-79 < 0 \\
&\iff k^2 - \frac{14}{25}k - \frac{79}{25} < 0 \iff \left(k-\frac{7}{25}\right)^2 - \frac{49}{625} - \frac{79}{25} < 0 \\
&\iff \left(k-\frac{7}{25}\right)^2 - \frac{2024}{625} < 0 \iff \left(k - \frac{7}{25} + \frac{\sqrt{2024}}{25}\right)\left(k - \frac{7}{25} - \frac{\sqrt{2024}}{25}\right) < 0
\end{aligned}$$

Le trinôme est positif sauf entre les racines $\frac{7}{25} - \frac{\sqrt{2024}}{25} \approx -1,51$ et $\frac{7}{25} + \frac{\sqrt{2024}}{25} \approx 2,07$.
Les entiers k solutions sont donc : $-1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2$. Les quatre points de $(\mathcal{D})$ à coordonnées entières dont la distance au point O est inférieure à 9 sont $\mathrm{E}(4\ ;\ -5)$, $\mathrm{F}(1\ ;\ -1)$, $\mathrm{G}(-2\ ;\ 3)$, $\mathrm{H}(-5\ ;\ 7)$

Géométrie

<u>Exercice</u> :

1. (a) On sait que l'équation paramétrique de la droite D' est celle d'une droite contenant le point $(0\,;\,0\,;\,\text{-}2)$ et de vecteur directeur $\vec{u'}(1\ ;\ -1\ ;\ 0)$. Or $\vec{u}\cdot\vec{u'} = 1-1+0 = 0$: les vecteurs directeurs des deux droites sont orthogonaux ; les droites D et D' sont orthogonales.
Le point A est commun aux deux droites D et D'.
S'il existe un plan contenant A et défini par les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$, un vecteur $\vec{n}(a\ ;\ b\ ;\ c)$ normal à ce plan est orthogonal à chaque vecteur $\vec{u}$ et $\vec{u'}$; donc $\vec{n}\cdot\vec{u} = 0 \iff a+b=0$ et $\vec{n}\cdot\vec{u'} = 0 \iff a-b=0$. On en déduit aussitôt que $a=b=0$ et $\vec{n}(0\ ;\ 0\ ;\ c)$. Donc une équation de ce plan est $z=k$ soit $z=2$ puisque A appartient à ce plan hoizontal. Ceci est impossible puisque tous les points de D' ont pour cote -2. Par conséquent, les droites D et D' ne sont pas coplanaires.

(b) $\overrightarrow{MH}\ (\ x-x_H\,;\,y-x_H\,;\,z-z_H\ )$. Comme H est le projeté orthogonale de M sur D', alors $\overrightarrow{MH}$ est orthogonal à $\vec{u}$. Ainsi, $\overrightarrow{MH}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow (x_H - x) + (y_H - y) = 0$. De plus, $H \in D$ dont une équation paramétrique est $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.
Ainsi, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x_H = t$, $y_H = t$ et $z_H = -2$. En particulier, $t - x + t - y = 0$ soit $2t = x+y$ et $x_H = y_H = t = \frac{x+y}{2}$. On en déduit que $x_{\overrightarrow{MH}} = \frac{x+y}{2} - x = \frac{-x+y}{2}$, $y_{\overrightarrow{MH}} = \frac{x+y}{2} - y = \frac{x-y}{2}$ et $z_{\overrightarrow{MH}} = z_H - z = 2 - z$. Finalement, $\overrightarrow{MH}\begin{pmatrix} \frac{-x+y}{2} \\ \frac{x-y}{2} \\ z-2 \end{pmatrix}$. Par conséquent,

$$MH^2 = \left(\frac{y-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + (2-z)^2 = \frac{x^2+y^2-2xy}{2} + 4 - 4z + z^2 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + z^2 - xy - 4z + 4$$

(c)

$$\begin{aligned}
M\,(x\,;\,y\,;\,z) \in S &\Leftrightarrow MH = MK \Leftrightarrow MH^2 = MK^2 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + z^2 - xy - 4z + 4 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + z^2 + xy + 4z + 4 \\
&\Leftrightarrow -xy - 4z = xy + 4z \Leftrightarrow 8z = -2xy \Leftrightarrow z = -\frac{1}{4}xy
\end{aligned}$$

2. (a) Le plan (xOy) a pour équation $z = 0$; les points de la section ont leurs coordonnées qui

vérifient : $\begin{cases} z &= 0 \\ z &= -\dfrac{1}{4}xy \end{cases} \iff \begin{cases} z &= 0 \\ xy &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}$

La section se compose de l'axe des abscisses et de l'axe des ordonnées.

(b) Un plan parallèle à (xOy) a une équation de la forme $z = k,\ k \in \mathbb{R}$; les points de la section ont leurs coordonnées qui vérifient :

$$\begin{cases} z &= k \\ z &= -\dfrac{1}{4}xy \end{cases} \iff \begin{cases} z &= k \\ xy &= -4k \end{cases} \iff \begin{cases} y &= -\dfrac{4k}{x} \\ z &= k \end{cases} \text{ si } x \neq 0$$

La section est donc une hyperbole

(c) Les points de la section ont leurs coordonnées qui vérifient :

$$\begin{cases} x+y &= 0 \\ z &= -\dfrac{1}{4}xy \end{cases} \iff \begin{cases} y &= -x \\ z &= \dfrac{1}{4}x^2 \end{cases}$$

La section est donc ici une parabole.

Géométrie et Arithmétique

Exercice 1 :

PARTIE A

1. (a) E_1 est l'intersection de $\mathcal{P}$ et de S_1. Les coordonnés d'un point quelconque de E_1 vérifient donc le système : $\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ x = 2 \end{cases}$ qui équivaut à $\begin{cases} x = 2 \\ z = y^2+4 \end{cases}$.

   Dans le plan $\mathcal{P}$, $z = y^2 + 4$ est l'équation d'une parabole.

   (b) E_2 est l'intersection de $\mathcal{P}$ et de S_2. Les coordonnés d'un point quelconque de E_2 vérifient donc le système : $\begin{cases} z = xy+2x \\ x = 2 \end{cases}$ qui équivaut à $\begin{cases} x = 2 \\ z = 2y+4 \end{cases}$.

   E_2 est donc une droite dans le plan $\mathcal{P}$

2. (a) voir figure à la fin de l'exercice

   (b) Les coordonnées des points d'intersection B et C des ensembles E_1 et E_2 vérifient le système :

$$\begin{cases} x = 2 \\ z = x^2+y^2 \\ z = 2y+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ z = y^2+4 \\ y^2+4 = 2y+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ z = 2y+4 \\ y(y-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ z = 2y+4 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 2 \\ z = 2y+4 \\ y = 2 \end{cases}$$

   On obtient deux points : B(2 ; 0 ; 4) et C(2 ; 2 ; 8)

PARTIE B

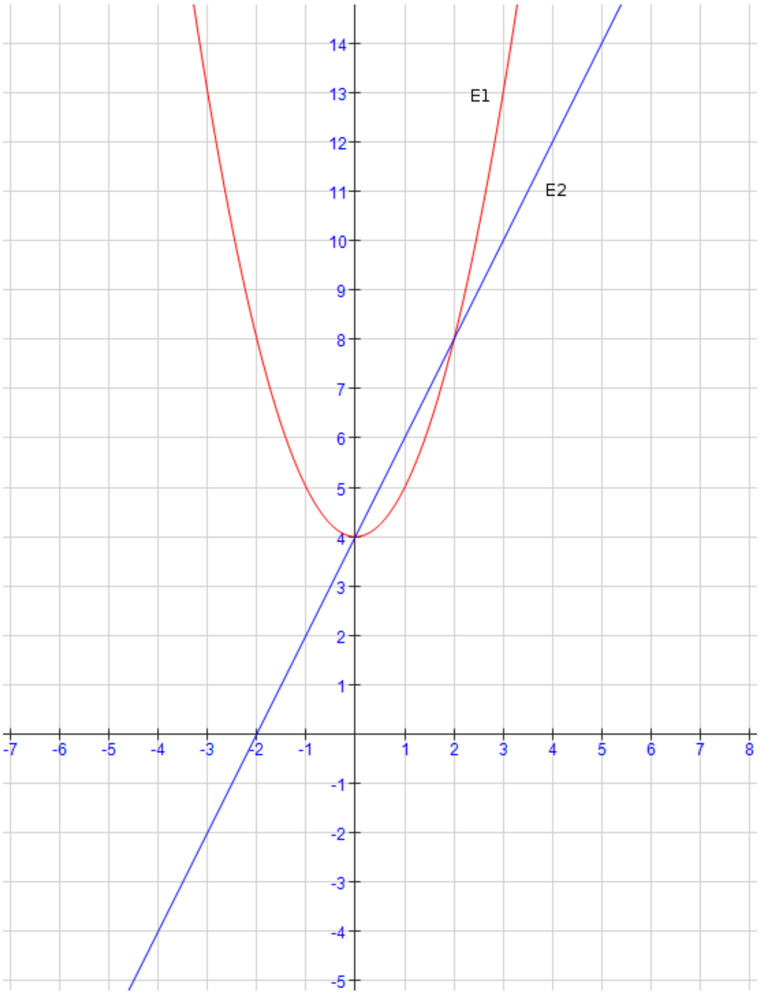
1. (a) $M \in S_1 \cap S_2 \Leftrightarrow x^2+y^2 = xy+2x$ c'est-à-dire $y^2 - xy = 2x - x^2$ d'où $y(y-x) = x(2-x)$.

   (b) x est premier ; il divise $x(2-x)$ donc divise $y(y-x)$.
   Soit il divise y, soit il est premier avec y et alors il divise $y - x$ d'après le théoèrème de Gauss. Mais s'il divise $y - x$, il divise $(y-x)+x$ donc y ; ce qui contredit la supposition qu'il est premier avec y. On en déduit que x divise y.

2. (a) $y(y-x) = x(2-x)$ s'écrit alors $kx(kx-x) = x(2-x)$, donc $kx^2(k-1) = x(2-x)$.
   x est premier donc non nul ; on peut simplifier par x.
   On obtient alors : $kx(k-1) = 2-x$.
   x est premier, divise $kx(k-1)$, donc divise $2-x$. Comme il divise aussi x, il divise la somme $(2-x)+x = 2$ c'est-à-dire x divise donc 2.
   x est un diviseur de 2 et est premier, donc $x = 2$.

(b) Avec $x = 2$, l'égalité $kx(k-1) = x(2-x)$ donne $k(k-1) = 0$. On en déduit $k = 0$ ou $k = 1$.

3. Pour $k = 0$, on obtient comme coordonnées $(2\ ;\ 0\ ;\ 4)$ qui sont les coordonnées du point B. Pour $k = 1$, on obtient comme coordonnées $(2\ ;\ 2\ ;\ 8)$ qui sont les coordonnées du point C. Ainsi retrouve-t-on les résultats de la première partie, question 2.b.



Exercice 2 :

1. (a) Le couple $(9\,;\,1)$ est une solution relativement évidente de l'équation car $3\times 9+2\times 1 = 29$.

   (b) Soit $(x\,;\,y)$ une solution de (E). On note $(x_0\,;\,y_0) = (9\,;\,1)$ une solution évidente (E). Alors $3x+2y = 1 = 3x_0+2y_0$ d'où $3(x-x_0) = 2(y_0-y)$ (F). Comme $x - x_0 \in \mathbb{Z}$, alors 3 divise $2(y_0-y)$. Les nombres 2 et 3 sont des nombres premiers distincts donc ils sont premiers entre eux. On peut alors appliquer le théorème de Gauss pour affirmer que 3 divise $y_0 - y$. Autrement dit, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y_0 - y = 3k \;\Leftrightarrow y = y_0 - 3k = 1-3k$. En remplaçant dans (F), on obtient : $3(x-x_0) = 2\times 3k \;\Leftrightarrow\; x - x_0 = 2k \;\Leftrightarrow\; x = x_0+2k = 9+2k$. On a donc prouvé que tout couple solution s'écrit sous la forme $(9+2k\,;\,1-3k)$ avec $k\in\mathbb{Z}$. Réciproquement, si $k \in \mathbb{Z}$, alors $3(9+2k)+2(1-3k) = 27+6k+2-6k = 29$ donc l'ensemble des solutions de (E) est $\mathcal{S} = \{((9+2k\,;\,1-3k)\,;\,k\in\mathbb{Z}\}$.

   (c) $x \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; 9+2k\geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; 2k \geqslant -9 \;\Leftrightarrow\; k \geqslant -\dfrac{9}{2}$, ce qui équivaut à $k \geqslant -4$ car $k \in \mathbb{E}$.

   $y \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; 1-3k \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; 3k \leqslant 1 \;\Leftrightarrow\; k \leqslant \dfrac{1}{3}$, ce qui équivaut à $k \leqslant 0$ car $k\in\mathbb{Z}$.

   Il y a seulement cinq couples solutions $(x\,;\,y)$ tels que $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$:
   - pout $k = -4$, $(x\,;\,y) = (1\,;\,13)$
   - pour $k = -3$, $(x\,;\,y) = (3\,;\,10)$
   - pour $k = -2$, $(x\,;\,y) = (5\,;\,7)$
   - pour $k = -1$, $(x\,;\,y) = (7\,;\,4)$
   - pour $k = 0$, $(x\,;\,y) = (9\,;\,1)$.

2. (a) On sait qu'un vecteur $\vec{n}$ normal au plan $\mathcal{P}$ a pour coordonnées $(3\,;\,2\,;\,0)$ et $\vec{k}(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$. Donc $\vec{n}\cdot\vec{k}=0$. $\vec{k}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, ce qui montre que $\mathcal{P}$ est parallèle à l'axe (Oz).

(b) • L'axe (Ox) est défini par le système $y=0$ et $z=0$; les points communs à $\mathcal{P}$ et à (Ox) vérifient donc : $\left\{\begin{array}{lcl}3x+2y&=&29\\ y&=&0\\ z&=&0\end{array}\right.$ Ainsi, $x=\dfrac{29}{3}$. Le point commun A a donc pour coordonnées $A\left(\dfrac{29}{3}\ ;\ 0\ ;\ 0\right)$.

• L'axe (Oy) est défini par le système $x=0$ et $z=0$; les points communs à $\mathcal{P}$ et à (Oy) vérifient donc : $\left\{\begin{array}{lcl}3x+2y&=&29\\ x&=&0\\ z&=&0\end{array}\right.$ Ainsi, $y=\dfrac{29}{2}$. Le point commun B a donc pour coordonnées $B\left(0\ ;\ \dfrac{29}{2}\ ;\ 0\right)$.

(c) Les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et de (xOy) vérifient : $\left\{\begin{array}{l}3x+2y=29\\ z=0\end{array}\right.$ Il s'agit d'une droite incluse dans le plan (xOy) dont les points A et B font partie. L'intersection est donc la droite (AB).
$\mathcal{P}$ étant parallèle à (Oz) l'intersection de $\mathcal{P}$ et du plan (xOz) est la droite contenant A et parallèle à (Oz).
$\mathcal{P}$ étant parallèle à (Oz) l'intersection de $\mathcal{P}$ et du plan (yOz) est la droite contenant B et parallèle à (Oz).
voir la figure en annexe

(d) Ces points correspondent aux couples solutions de l'équation initiale avec des termes positifs, soit les points : $(1\,;\,13\,;\,0)$, $(3\,;\,10\,;\,0)$, $(5\,;\,7\,;\,0)$, $(7\ ;\,4\,;\,0)$ et $(9\ ;\,1\,;\,0)$ (voir la figure).

3. (a) Les points de cette section ont des coordonnées qui vérifient $\left\{\begin{array}{lcl}4z&=&xy\\ z&=&0\end{array}\right.$
Dans le plan $z=0$, on obtient : $xy=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $y=0$. Il s'agit de la réunion des deux droites formant les axes du plan (xOy). La réponse est la figure n° 3.

(b) Les points de cette section ont des coordonnées qui vérifient $\left\{\begin{array}{lcl}4z&=&xy\\ z&=&1\end{array}\right.$
Dans le plan d'équation $z=1$, on obtient : $xy=4 \Leftrightarrow y=\dfrac{4}{x}$. On reconnait l'équation d'une hyperbole. La réponse est la figure n° 1.

(c) Les points de cette section ont des coordonnées qui vérifient

$$\left\{\begin{array}{lcl}4z&=&xy\\ y&=&8\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}4z&=&8x\\ y&=&8\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}z&=&2x\\ y&=&8.\end{array}\right.$$

On reconnait l'équation d'une droite de coefficient directeur 2 dans le plan d'équation $y=8$. La réponse est la figure n° 4.

(d) Les points de cette section ont des coordonnées qui vérifient $\left\{\begin{array}{lcl}4z&=&xy\\ 3x+2y&=&29\end{array}\right.$
On a trouvé à la question précédente les points dont les coordonnées vérifient la deuxième équation :

- $x=1,\ y=13$ donc $4z=13 \iff z=\dfrac{13}{4}$;
- $x=3,\ y=10$ donc $4z=30 \iff z=\dfrac{15}{2}$;
- $x=5,\ y=7$ donc $4z=35 \iff z=\dfrac{35}{4}$;
- $x=7,\ y=4$ donc $4z=28 \iff z=7$;
- $x=9,\ y=1$ donc $4z=9 \iff z=\dfrac{9}{4}$.