CORRECTION DE L'EXERCICE 74 p.73 SUR LES SIMILITUDES INDIRECTES

1. (a) Soit M_1 l'image de M (d'affixe z) par f. L'affixe de M_1 est alors $z_1 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z}$. Si on note M_2 l'image de M_1 par f, son affixe z_2 est $z_2 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z_1} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z}}$.

$$z_2 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) z = z$$

L'application $f \circ f$ correspond donc à l'identité.

(b) L'écriture complexe de f est $z' = \left(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})\right)\overline{z} = e^{i\frac{\pi}{3}}\overline{z}$. On considère donc la symétrie axiale S d'axe (Ox) et la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. L'écriture complexe de S est $z \mapsto \overline{z}$ et celle de R est $z \mapsto e^{i\frac{\pi}{3}}z$ donc la composée $R \circ S$ a pour écriture complexe $z \mapsto e^{i\frac{\pi}{3}}\overline{z}$, il s'agit donc de f.

(c) Comme f est la composée d'une rotation (similitude directe) et d'une réflexion, alors f est une similitude indirecte. Pour déterminer les points invariants de f, on écrit z sous forme algébrique : $z = x + iy$. Alors M d'affixe z est invariant signifie que

$$x + iy = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x - iy) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}iy + i\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = \frac{x + \sqrt{3}y}{2} + i\frac{-y + \sqrt{3}x}{2}$$

En identifiant parties réelles et parties imaginaires, cela donne :

$$\begin{cases} \dfrac{x + \sqrt{3}y}{2} = x \\ \\ \dfrac{-y + \sqrt{3}x}{2} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{3}y = 2x \\ -y + \sqrt{3}x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{3}y = 0 \\ 3y - \sqrt{3}x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{3}y = 0 \\ -\sqrt{3}(x - \sqrt{3}y) = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des points $M(x\,,\,y)$ invariants par f a pour équation $x - \sqrt{3}y = 0$. C'est donc une droite. Comme f est une similitude indirecte ayant pour ensemble de points invariants une droite, c'est une symétrie axiale d'axe $\mathcal{D}_1$ d'équation $x - \sqrt{3}y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}x = \frac{\sqrt{3}}{3}x$. Comme $f = R \circ S$, alors $R = f \circ S^{-1} = f \circ S$ est une décomposition de R en deux symétriques axiales.

2. (a) On utilise la forme algébrique pour déterminer les points invariants :

$$z'' = z \quad \Leftrightarrow \quad x + iy = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x - iy) - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x + iy = \frac{x + \sqrt{3}y}{2} + i\frac{-y + \sqrt{3}x}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x + \sqrt{3}y - 1}{2} + i\frac{-y + \sqrt{3}x + \sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x + \sqrt{3}y - 1}{2} = x \\ \\ \dfrac{-y + \sqrt{3}x + \sqrt{3}}{2} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{3}y - 1 = 2x \\ -y + \sqrt{3}x + \sqrt{3} = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3}y - 1 \\ \sqrt{3}x = 3y - \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3}y - 1 \\ x = \sqrt{3}y - 1 \end{cases}$$

L'ensemble des points invariants de g est la droite $\mathcal{D}_2$ d'équation

$$x - \sqrt{3}y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(b) On considère l'application ayant pour écriture complexe $z \mapsto z - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Alors, z'' est l'image de $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z}$ par cette application donc on peut écrire $g = T \circ f$ ou T désigne la transformation associée à $z \mapsto z - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Cette transformation est alors la translation de vecteur $\vec{V}$ avec $z_{\vec{V}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(c) Comme g est la composée d'une similitude diecte (T) et d'une symétrie axiale (f), alors g est une similitude indirecte. L'ensemble de ses points invariants est la droite $\mathcal{D}_2$ donc g est nécessairement une symétrie axiale d'axe $\mathcal{D}_2$.
Comme $g = T \circ f$, alors $g \circ f^{-1} = T$ et vu que $f \circ f = id$, alors $f^{-1} = f$ d'où $T = g \circ f$ est la composée de deux symétries axiales.

(d) L'image par g de A est le point A' d'affixe :

$$\begin{aligned} z_{A'} &= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z_A} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = z_A \end{aligned}$$

On en déduit que $g(A) = A$.

La droite $\mathcal{D}_2$ passe par A et a le même coefficient directeur de $\mathcal{D}_1$ donc pour la construire il suffit de tracer la droite qui passe par A et parallèle à la droite $\mathcal{D}_1$ déjà tracée. poru placer A, on remarque que $z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}$.