

## DEVOIR SURVEILLE N° 6 (sujet b)

Le barème n'est pas définitif, il est seulement donné à titre indicatif

### Exercice 1 : Géométrie dans l'espace (7 points)

#### PARTIE A : Restitution organisée de connaissances

- (a) Donner (sans justification) l'équation du cylindre  $\mathcal{C}$  d'axe  $(Ox)$  et de rayon  $r$ .  
(b) Déterminer la section du plan d'équation  $y = b$  avec le cylindre  $\mathcal{C}$  (refaire la démonstration du cours adaptée à ce cylindre et à ce plan ; faire une distinction de cas)
- (a) Déterminer une équation du cylindre  $\mathcal{C}'$  d'axe  $(Ox)$  dont l'intersection avec le plan d'équation  $y = -\frac{\sqrt{11}}{2}$  est la réunion de droites passant respectivement par  $A \left( 0; -\frac{\sqrt{11}}{2}; \frac{3}{2} \right)$  et  $B \left( 0; -\frac{\sqrt{11}}{2}; -\frac{3}{2} \right)$ .  
(b) Donner l'équation paramétrique des droites qui composent cette intersection.  
(c) Déterminer l'intersection de  $\mathcal{C}'$  avec le plan d'équation  $x = -500000$ .

#### PARTIE B : Questions à Choix Multiples

Pour chacune des trois questions suivantes, quatre propositions sont faites, parmi lesquelles figure une seule bonne réponse. Ecrire sur votre copie la lettre correspondant à la bonne réponse associée au numéro de chaque question. Aucune justification n'est demandée mais des points négatifs seront attribués pour une réponse incorrecte

- On considère la surface  $\mathcal{S}_1$  d'équation  $y^2 + z^2 = x$ .  
(a) La droite d'équations paramétriques  $\begin{cases} x = 8 \\ y = t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$  coupe  $\mathcal{S}_1$  en deux points.  
(b)  $\mathcal{S}_1$  est l'équation d'un cône de demi-angle au sommet  $\frac{\pi}{4}$ .  
(c) Si  $a \in \mathbb{R}$ , la section de  $\mathcal{S}_1$  avec le plan d'équation  $x = a$  est un cercle.  
(d) Le plan d'équation  $z = 4$  ne coupe pas  $\mathcal{S}_1$ .
- On considère la surface  $\mathcal{S}_2$  d'équation  $x^2 + y^2 = z^2$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .  
(a)  $\mathcal{S}_2$  est un cylindre d'axe  $(Oz)$ .  
(b) La section de  $\mathcal{S}_2$  avec le plan d'équation  $y = 1$  est la réunion de deux droites parallèles.  
(c)  $C(1; 2; -\sqrt{3}) \in \mathcal{S}_2$ .  
(d)  $\mathcal{S}_2$  contient la droite passant par  $O$  et de vecteur directeur  $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ .
- On considère la surface  $\mathcal{S}_3$  d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + z + 3 = 0$ .  
(a)  $\mathcal{S}_3$  est l'équation d'un cône d'axe  $(Ox)$ .  
(b)  $\mathcal{S}_3$  a une intersection vide avec le plan d'équation  $x - y = 0$ .  
(c)  $\mathcal{S}_3$  est l'équation d'une sphère de centre  $\Omega(0; 1; -\frac{1}{2})$ .  
(d)  $\mathcal{S}_3$  a pour intersection un cercle avec le plan d'équation  $(yOz)$ .

#### PARTIE C : Définition d'un cône

On considère la droite  $\mathcal{D}$  passant par  $A(2, 7, -3)$  et de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Soit  $(C)$  un cône d'axe  $\Delta$  parallèle à  $(Oz)$ . On sait de plus que  $B(2; -5; 0) \in \Delta$  et que  $\mathcal{D}$  est une génératrice du cône  $(C)$ .

- Déterminer une équation paramétrique de la droite  $\mathcal{D}$ .
- Déterminer le sommet  $S$  du cône.
- En déduire une équation du cône  $(C)$ .
- On s'intéresse à la section du plan d'équation  $z = a$  avec le cône  $(C)$ .  
(a) On suppose que  $a \in [0; \frac{1}{2}]$ . Quelle est la nature de la section cherchée? Préciser ses éléments caractéristiques.  
(b) Comment doit-on choisir  $a$  pour que la section soit réduite à un point? Quel est alors ce point?

### Exercice 2 : Similitude directe (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . On prendra comme unité graphique 2cm.  
On note A, B, C, D et E les points d'affixes respectives

$$z_A = 2i, z_B = 2, z_C = 4 + 6i, z_D = -1 + i \text{ et } z_E = -3 + 3i.$$

- Placer les points sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure des questions.
- Déterminer la nature du triangle ABC.
- Soit  $f$  la similitude plane directe telle que  $f(A) = D$  et  $f(B) = A$ .
  - Donner l'écriture complexe de  $f$ .
  - Déterminer l'angle, le rapport et le centre  $\Omega$  de cette similitude.
  - Montrer que le triangle DAE est l'image du triangle ABC par la similitude  $f$ .
  - En déduire la nature du triangle DAE.
- On désigne par  $(\Gamma_1)$  le cercle de diamètre [AB] et par  $(\Gamma_2)$  le cercle de diamètre [AD].  
On note  $M$  le second point d'intersection du cercle  $(\Gamma_1)$  et de la droite (BC), et  $N$  le second point d'intersection du cercle  $(\Gamma_2)$  et de la droite (AE).
  - Déterminer l'image de  $M$  par la similitude  $f$ .
  - En déduire la nature du triangle  $\Omega MN$ .
  - Montrer que  $MB \times NE = MC \times NA$ .

### Exercice 3 : Similitudes et arithmétique (6 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  avec pour unité graphique 1cm.

On note  $r_1$  la rotation de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{3}$  et  $r_2$  la rotation de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{5}$ .

#### Partie A

- Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation (E) :  $3y = 5(15 - x)$ .
- Soit I le point d'affixe 1.  
On considère un point A mobile sur le cercle trigonométrique  $\mathcal{C}$  de centre O.  
Sa position initiale est en I.  
On appelle  $d$  la distance, exprimée en centimètres, qu'a parcourue le point A sur le cercle  $\mathcal{C}$  après avoir subi  $p$  rotations  $r_1$  et  $q$  rotations  $r_2$  ( $p$  et  $q$  étant des entiers naturels).  
On convient que lorsque A subit la rotation  $r_1$  (respectivement  $r_2$ ), il parcourt une distance de  $\frac{\pi}{3}$  cm (respectivement  $\frac{\pi}{5}$  cm).  
Déterminer toutes les valeurs possibles de  $p$  et  $q$  pour lesquelles le point A a parcouru exactement deux fois et demie la circonférence du cercle  $\mathcal{C}$  à partir de I.

#### Partie B

On note  $h_1$  l'homothétie de centre O et de rapport 4 et  $h_2$  l'homothétie de centre O et de rapport  $-6$ . On pose  $s_1 = r_1 \circ h_1$  et  $s_2 = r_2 \circ h_2$ .

- Préciser la nature et les éléments caractéristiques de  $s_1$  et  $s_2$ .
- On pose :  
 $S_m = s_1 \circ s_1 \cdots \circ s_1$  (composée de  $m$  fois  $s_1$ ,  $m$  étant un entier naturel non nul),  
 $S'_n = s_2 \circ s_2 \cdots \circ s_2$  (composée de  $n$  fois  $s_2$ ,  $n$  étant un entier naturel non nul), et  $f = S'_n \circ S_m$ .
  - Justifier que  $f$  est la similitude directe de centre O, de rapport  $2^{2m+n} \times 3^n$  et d'angle  $m\frac{\pi}{3} + n\frac{\pi}{5}$ .
  - $f$  peut-elle être une homothétie de rapport 144 ?
  - On appelle  $M$  le point d'affixe 6 et  $M'$  son image par  $f$ .  
Peut-on avoir  $OM' = 240$  ?  
Démontrer qu'il existe un couple d'entiers naturels unique  $(m, n)$  tel que  $OM' = 576$ .  
Calculer alors la mesure principale de l'angle orienté  $(\vec{u}; \overrightarrow{OM'})$ .

**Exercice 4 : Similitude directe : un lieu géométrique .... (3 points)**

Dans tout l'exercice  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  est un repère orthonormal direct du plan complexe (unité graphique : 4 cm). On désigne par  $A$  le point d'affixe  $z_A = 1$ , par  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $O$  et de rayon 1 et par  $\mathcal{C}'$  le cercle de centre  $O'$  d'affixe 2 et de rayon 1.

1. (a) Construire le point  $A'$  appartenant au cercle  $\mathcal{C}'$  tel que :  $(\vec{OA}; \vec{O'A'}) \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$
- (b) À tout point  $M$  du cercle  $\mathcal{C}$  d'affixe  $z$ , on associe le point  $M'$  du cercle  $\mathcal{C}'$  d'affixe  $z'$  tel que :  $(\vec{OM}; \vec{O'M'}) \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$ .

Déterminer le module et un argument de  $\frac{z' - 2}{z}$ . En déduire que  $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2$ .

- (c) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de la transformation  $r$  qui à tout point  $M$  du plan d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que  $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2$ .
2. À tout point  $M$  du plan, on associe le point  $M_1$  milieu du segment  $[MM']$ .  
Quel est le lieu géométrique du point  $M_1$  lorsque  $M$  décrit le cercle  $\mathcal{C}$  ?