Lycée J.P Vernant - spé TS — Année scolaire 2010-2011

Vendredi 20 mai

DEVOIR SURVEILLE N° 6 (sujet a)

Le barème n'est pas définitif, il est seulement donné à titre indicatif

Exercice 1 : Géométrie dans l'espace (7 points)

PARTIE A : *Restitution organisée de connaissances*

1. (a) Donner (sans justification) l'équation du cylindre $\mathcal{C}$ d'axe (Oy) et de rayon r.
   (b) Déterminer la section du plan d'équation $x = a$ avec le cylindre $\mathcal{C}$ *(refaire la démonstration du cours adaptée à ce cylindre et à ce plan ; faire une distinction de cas)*
2. (a) Déterminer une équation du cylindre $\mathcal{C}'$ d'axe (Oy) dont l'intersection avec le plan d'équation $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ est la réunion de droites passant respectivement par $A\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,;\,0\,;\,\dfrac{3}{2}\right)$ et $B\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,;\,0\,;\,-\dfrac{3}{2}\right)$.
   (b) Donner l'équation paramétrique des droites qui composent cette intersection.
   (c) Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}'$ avec le plan d'équation $y = -10000$.

PARTIE B : *Questions à Choix Multiples*

Pour chacune des trois questions suivantes, quatre propositions sont faites, parmi lesquelles figure une seule bonne réponse. Ecrire sur votre copie la lettre correspondant à la bonne réponse associée au numéro de chaque question. Aucune justification n'est demandée mais des points négatifs seront attribués pour une réponse incorrecte

1. On considère la surface $\mathcal{S}_1$ d'équation $x^2 + y^2 = z^2$ dans le repère $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k})$.
   (a) $C\,(1\,;\,2\,;\,-\sqrt{3}) \in \mathcal{S}_1$.
   (b) $\mathcal{S}_1$ est un cylindre d'axe (Oz).
   (c) $\mathcal{S}_1$ contient la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$.
   (d) La section de $\mathcal{S}_1$ avec le plan d'équation $y = 1$ est la réunion de deux droites parallèles.
2. On considère la surface $\mathcal{S}_2$ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + z + 3 = 0$.
   (a) $\mathcal{S}_2$ a une intersection vide avec le plan d'équation $x - y = 0$.
   (b) $\mathcal{S}_2$ est l'équation d'une sphère de centre $\Omega\,(0\,;\,1\,;\,-\dfrac{1}{2})$.
   (c) $\mathcal{S}_2$ a pour intersection un cercle avec le plan d'équation (yOz).
   (d) $\mathcal{S}_2$ est l'équation d'un cône d'axe (Ox).
3. On considère la surface $\mathcal{S}_3$ d'équation $y^2 + z^2 = x$.
   (a) $\mathcal{S}_3$ est l'équation d'un cône de demi-angle au sommet $\dfrac{\pi}{4}$.
   (b) Le plan d'équation $z = 4$ ne coupe pas $\mathcal{S}_3$.
   (c) Si $a \in \mathbb{R}$, la section de $\mathcal{S}_3$ avec le plan d'équation $x = a$ est un cercle.
   (d) La droite d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 8 \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$ $, t \in \mathbb{R}$ coupe $\mathcal{S}_3$ en deux points.

PARTIE C : *Définition d'un cône*

On considère la droite $\mathcal{D}$ passant par $A\,(7\,,3\,,0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Soit (C) un cône d'axe Δ parallèle à (Oz). On sait de plus que $B\,(-1\,;\,3\,;\,0) \in \Delta$ et que $\mathcal{D}$ est une génératrice du cône (C).

1. Déterminer une équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.
2. Déterminer le sommet S du cône.
3. En déduire une équation du cône (C).
4. On s'interesse à la section du plan d'équation $z = a$ avec le cône (C).
   (a) On suppose que $a \in [0\,;\,2]$. Quelle est la nature de la section cherchée ? Préciser ses éléments caractéristiques.
   (b) Comment doit-on choisir a pour que la section soit réduite à un point ? Quel est alors ce point ?

Exercice 2 : Similitude directe (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v})$. On prendra comme unité graphique 2cm.

On note A, B, C, D et E les points d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = 2\text{i},\ z_{\text{B}} = 2,\ z_{\text{C}} = 4+6\text{i},\ z_{\text{D}} = -1+\text{i}\ \text{ et }\ z_{\text{E}} = -3+3\text{i}.$$

1. Placer les points sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure des questions.
2. Déterminer la nature du triangle ABC.
3. Soit f la similitude plane directe telle que $f(\text{A}) = \text{D}$ et $f(\text{B}) = \text{A}$.
   (a) Donner l'écriture complexe de f.
   (b) Déterminer l'angle, le rapport et le centre Ω de cette similitude.
   (c) Montrer que le triangle DAE est l'image du triangle ABC par la similitude f.
   (d) En déduire la nature du triangle DAE.
4. On désigne par (Γ_1) le cercle de diamètre [AB] et par (Γ_2) le cercle de diamètre [AD].
   On note M le second point d'intersection du cercle (Γ_1) et de la droite (BC), et N le second point d'intersection du cercle (Γ_2) et de la droite (AE).
   (a) Déterminer l'image de M par la similitude f.
   (b) En déduire la nature du triangle ΩMN.
   (c) Montrer que $M\text{B} \times N\text{E} = M\text{C} \times N\text{A}$.

Exercice 3 : Similitudes et arithmétique (6 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j})$ avec pour unité graphique 1cm.

On note r_1 la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et r_2 la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{5}$.

Partie A

1. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $3y = 5(15 - x)$.
2. Soit I le point d'affixe 1.
   On considère un point A mobile sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O.
   Sa position initiale est en I.
   On appelle d la distance, exprimée en centimètres, qu'a parcourue le point A sur le cercle $\mathcal{C}$ après avoir subi p rotations r_1 et q rotations r_2 (p et q étant des entiers naturels).
   On convient que lorsque A subit la rotation r_1 (respectivement r_2), il parcourt une distance de $\dfrac{\pi}{3}$ cm (respectivement $\dfrac{\pi}{5}$ cm).
   Déterminer toutes les valeurs possibles de p et q pour lesquelles le point A a parcouru exactement deux fois et demie la circonférence du cercle $\mathcal{C}$ à partir de I.

Partie B

On note h_1 l'homothétie de centre O et de rapport 4 et h_2 l'homothétie de centre O et de rapport -6. On pose $s_1 = r_1 \circ h_1$ et $s_2 = r_2 \circ h_2$.

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de s_1 et s_2.
2. On pose :
   $S_m = s_1 \circ s_1 \cdots \circ s_1$ (composée de m fois s_1, m étant un entier naturel non nul),
   $S'_n = s_2 \circ s_2 \cdots \circ s_2$ (composée de n fois s_2, n étant un entier naturel non nul), et $f = S'_n \circ S_m$.
   (a) Justifier que f est la similitude directe de centre O, de rapport $2^{2m+n} \times 3^n$ et d'angle $m\dfrac{\pi}{3} + n\dfrac{6\pi}{5}$.
   (b) f peut-elle être une homothétie de rapport 144 ?
   (c) On appelle M le point d'affixe 6 et M' son image par f.
   Peut-on avoir $OM' = 240$?
   Démontrer qu'il existe un couple d'entiers naturels unique $(m,\ n)$ tel que $OM' = 576$.
   Calculer alors la mesure principale de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OM'}\right)$.

<u>Exercice 4</u> : Similitude directe : un lieu géométrique .... (3 points)

Dans tout l'exercice $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan complexe (unité graphique : 4 cm). On désigne par A le point d'affixe $z_A = 1$, par $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1 et par $\mathcal{C}'$ le cercle de centre O' d'affixe 2 et de rayon 1.

1. (a) Construire le point A' appartenant au cercle $\mathcal{C}'$ tel que : $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{O'A'}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$

   (b) À tout point M du cercle $\mathcal{C}$ d'affixe z, on associe le point M' du cercle $\mathcal{C}'$ d'affixe z' tel que : $\left(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{O'M'}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.

   Déterminer le module et un argument de $\dfrac{z'-2}{z}$. En déduire que $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}z + 2$.

   (c) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de la transformation r qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}z + 2$.

2. À tout point M du plan, on associe le point M_1 milieu du segment $[MM']$.
   Quel est le lieu géométrique du point M_1 lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}$?