Lycée J.P Vernant - spé TS Année scolaire 2010-2011
Vendredi 1er avril

DEVOIR SURVEILLE N° 5 (sujet b)

Le barême n'est pas définitif, il est seulement donné à titre indicatif

Exercice 1 : (7,5 points)

PARTIE A : *Contrôle des connaissances*

1. Soit T une similitude.
   (a) Que signifie : "T est directe" ?
   (b) Donner deux exemples de similitudes directes.
   (c) Donner un exemple de similitude indirecte.
2. (a) Que signifie : "T est une isométrie" ?
   (b) Donner un exemple d'isométrie et un exemple de transformation n'étant pas une isométrie.
3. *Dire si les phrases suivantes sont vraies ou fausses en* ***justifiant*** *votre réponse*
   (a) Toute similitude directe s peut s'écrire sous la forme de la composée d'une homothétie et d'une rotation de même centre.
   (b) Si h est une hométhétie de centre A et de rapport k alors c'est une similitude directe de centre A, de rapport k et d'angle nul.
   (c) Une symétrie centrale est une similitude directe.
   (d) Si T est une isométrie, son écriture complexe est de la forme $z' = e^{i\alpha}z + b$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{C}$.
   (e) Une similitude directe d'angle $\frac{\pi}{2}$ est une rotation.

PARTIE B : *Applications directes du cours*

1. On considère la similitude S d'écriture complexe $z' = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 + i)$.
   (a) Caractériser S
   (b) Déterminer l'angle et le rapport de la similitude réciproque S^{-1}
   (c) Donner l'écriture complexe de S^{-1}.
2. Soit f la transformation qui au point $M\,(x\,;\,y)$ associe le point $M'\,(x'\,;\,y')$ défini par le système suivant :

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{5}\,y - 1 \\ y' = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

   (a) Justifier que f est une similitude directe dont vous préciserez le rapport et l'angle.
   (b) On s'intéresse aux points M à coordonnées entières dont les images se trouvent sur la droite d'équation $y = 3x + 5$. Quelle est la forme de leurs abscisses ?

PARTIE C : *Vrai ou Faux ?*

Dire si les phrases suivantes sont vraies ou fausses en ***justifiant avec précision*** *vos réponses*

1. Soit A et B deux points du plan distincts ; si on note f l'homothétie de centre A et de rapport 3 et g l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{3}$ alors $g \circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v})$, le point A d'affixe $2 - i$ et B l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On note I le milieu de $[AB]$.
   La similitude directe de centre A qui transforme I en O a pour écriture complexe $z' = (1 + i)z - 1 - 2i$
3. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v})$, on considère la similitude directe f d'écriture complexe $z \mapsto \frac{1}{2}\,(1 + i)\,z - 3 + i$.
   $f = r \circ h$ où h est l'homothétie de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et centre Ω d'affixe $-4 - 2i$ et où r est la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 2 : (6,5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 2cm. Soit A et B les points d'affixes respectives $z_A = i$ et $z_B = 1+2i$.

1. (a) **Question de cours** Montrer que si l'écriture complexe de S est $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$, alors S est une similitude directe dont vous préciserez le rapport et l'angle.

   *On **admet** que la réciproque de ce théorème est également vraie.*

   (b) Justifier qu'il exsite une unique similitude directe S telle que $S(O) = A$ et $S(A) = B$ et montrer que cette écriture complexe est $z' = (1-i)z + i$.

   (c) Préciser les éléments caractéristiques de S. On notera son centre Ω.

2. On considère la suite de points (A_n) telle que :
   - A_0 est l'origine du repère
   - pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = S(A_n)$.

   On note z_n l'affixe de A_n (on a donc $A_0 = O$, $A_1 = A$ et $A_2 = B$).

   (a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $z_n = 1 - (1-i)^n$.

   (b) Déterminer en fonction de n les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\Omega A_n}$ et $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$
   Comparer les normes de ces vecteurs et calculer une mesure de $\left(\overrightarrow{\Omega A_n}\,;\,\overrightarrow{A_nA_{n+1}}\right)$.

   (c) En déduire une construction du point A_{n+1} connaissant le point A_n.
   Construire les points A_3 et A_4.

   (d) Quels sont les points de la suite (A_n) qui appartiennent à la droite (ΩB) ?
   Parmi ces points, quels sont ceux :
   - dont l'ordonnée est négative ?
   - dont l'ordonnée vaut 45056 ?
   - dont l'ordonnée est un multiple de 2^{14} ?

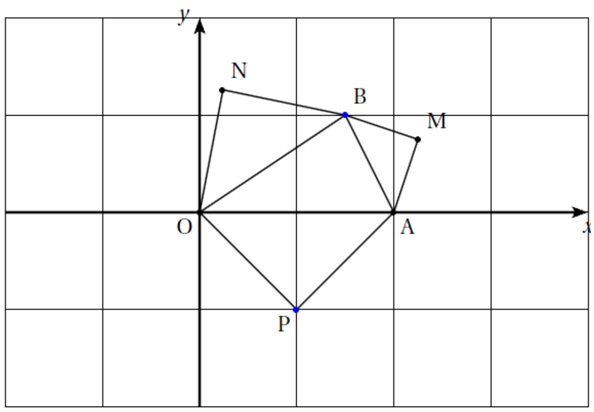
Exercice 3 : (6 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OJ})$. On considère les points A et B d'affixes $z_A = 2$ et $z_B = \dfrac{3}{2} + i$.

On considère les points M, N et P tels que les triangles AMB, BNO et OPA soient des triangles rectangles isocèles de sens direct comme le montre la figure ci-contre.

On note s_1 la similitude directe de centre A qui transforme M en B et s_2 la similitude directe de centre O qui transforme B en N. On considère la transformation $r = s_2 \circ s_1$.

Le but de l'exercice est de démontrer de deux façons différentes que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.



1. **A l'aide des transformations**

   (a) **Question de cours**

   Rappeler la définition géométrique de $S(M) = M'$ si S est la similitude directe de centre Ω, de rapport λ et d'angle θ.

   (b) Donner l'angle et le rapport de s_1 et de s_2.

   (c) Déterminer l'image du point M puis celle du point I par la transformation r.

   (d) Justifier que r est une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ dont on précisera le centre.

   (e) Quelle est l'image de O par r ?

   (f) En déduire que (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

2. **En utilisant les nombres complexes**

   (a) Donner les écritures complexes de s_1 et de s_2. On utilisera les résultats de la question 1.a)

   (b) En déduire les affixes z_M et z_N des points M et N.

   (c) Donner sans justification l'affixe z_P du point P puis démontrer que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.