

DEVOIR SURVEILLE N° 5 (sujet a)

Le barème n'est pas définitif, il est seulement donné à titre indicatif

Exercice 1 : (7,5 points)

PARTIE A : Contrôle des connaissances

- Soit T une similitude.
 - Que signifie : " T est directe" ?
 - Donner deux exemples de similitudes directes.
 - Donner un exemple de similitude indirecte.
- Que signifie : " T est une isométrie" ?
 - Donner un exemple d'isométrie et un exemple de transformation n'étant pas une isométrie.
- Dire si les phrases suivantes sont vraies ou fausses en **justifiant** votre réponse
 - Si T est une isométrie, son écriture complexe est de la forme $z' = e^{i\alpha}z + b$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{C}$.
 - Une similitude directe d'angle $\frac{\pi}{2}$ est une rotation.
 - Si h est une homothétie de centre A et de rapport k alors c'est une similitude directe de centre A , de rapport k et d'angle nul.
 - Une symétrie centrale est une similitude directe.
 - Toute similitude directe s peut s'écrire sous la forme de la composée d'une homothétie et d'une rotation de même centre.

PARTIE B : Applications directes du cours

- On considère la similitude S d'écriture complexe $z' = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - i)$.
 - Caractériser S
 - Déterminer l'angle et le rapport de la similitude réciproque S^{-1}
 - Donner l'écriture complexe de S^{-1} .
- Soit f la transformation qui au point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ défini par le système suivant :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{3}y + 1 \\ y' = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \end{cases}$$

- Justifier que f est une similitude directe dont vous préciserez le rapport et l'angle.
- On s'intéresse aux points M à coordonnées entières dont les images se trouvent sur la droite d'équation $y = 2x + 1$. Quelle est la forme de leurs abscisses ?

PARTIE C : Vrai ou Faux ?

Dire si les phrases suivantes sont vraies ou fausses en **justifiant avec précision** vos réponses

- On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, le point A d'affixe $2 - i$ et B l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On note I le milieu de $[AB]$.
La similitude directe de centre A qui transforme I en O a pour écriture complexe $z' = (1 + i)z - 1 - 2i$
- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère la similitude directe f d'écriture complexe $z \mapsto \frac{1}{2}(1 + i)z + 3 - i$.
 $f = r \circ h$ où h est l'homothétie de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et centre Ω d'affixe $4 + 2i$ et où r est la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
- Soit A et B deux points du plan distincts ; si on note f l'homothétie de centre A et de rapport 3 et g l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{3}$ alors $g \circ f$ est la translation de vecteur \overrightarrow{AB} .

Exercice 2 : (6,5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 2cm. Soit A et B les points d'affixes respectives $z_A = i$ et $z_B = 1 + 2i$.

1. (a) **Question de cours** Montrer que si l'écriture complexe de S est $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$, alors S est une similitude directe dont vous préciserez le rapport et l'angle.
On admet que la réciproque de ce théorème est également vraie.
 - (b) Justifier qu'il existe une unique similitude directe S telle que $S(O) = A$ et $S(A) = B$ et montrer que cette écriture complexe est $z' = (1 - i)z + i$.
 - (c) Préciser les éléments caractéristiques de S . On notera son centre Ω .
2. On considère la suite de points (A_n) telle que :
- A_0 est l'origine du repère
 - pour tout entier naturel n , $A_{n+1} = S(A_n)$.
- On note z_n l'affixe de A_n (on a donc $A_0 = O$, $A_1 = A$ et $A_2 = B$).
- (a) Démontrer que pour tout entier naturel n , $z_n = 1 - (1 - i)^n$.
 - (b) Déterminer en fonction de n les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\Omega A_n}$ et $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$.
Comparer les normes de ces vecteurs et calculer une mesure de $(\overrightarrow{\Omega A_n}; \overrightarrow{A_n A_{n+1}})$.
 - (c) En déduire une construction du point A_{n+1} connaissant le point A_n .
Construire les points A_3 et A_4 .
 - (d) Quels sont les points de la suite (A_n) qui appartiennent à la droite (ΩB) ?
Parmi ces points, quels sont ceux :
 - dont l'ordonnée est positive ?
 - dont l'ordonnée vaut 57344 ?
 - dont l'ordonnée est un multiple de 2^{16} ?

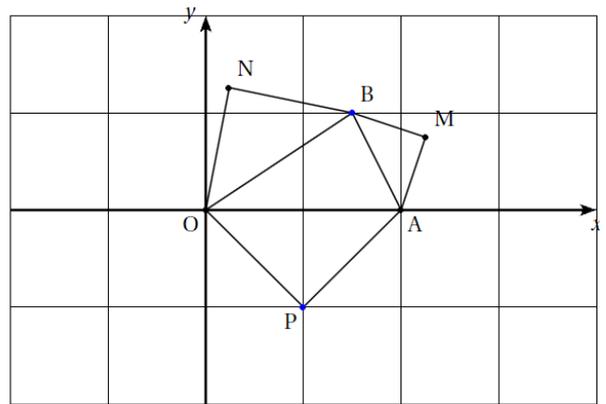
Exercice 3 : (6 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$. On considère les points A et B d'affixes $z_A = 2$ et $z_B = \frac{3}{2} + i$.

On considère les points M , N et P tels que les triangles AMB , BNO et OPA soient des triangles rectangles isocèles de sens direct comme le montre la figure ci-contre.

On note s_1 la similitude directe de centre A qui transforme M en B et s_2 la similitude directe de centre O qui transforme B en N . On considère la transformation $r = s_2 \circ s_1$.

Le but de l'exercice est de démontrer de deux façons différentes que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.



1. A l'aide des transformations

(a) Question de cours

Rappeler la définition géométrique de $S(M) = M'$ si S est la similitude directe de centre Ω , de rapport λ et d'angle θ .

- (b) Donner l'angle et le rapport de s_1 et de s_2 .
- (c) Déterminer l'image du point M puis celle du point I par la transformation r .
- (d) Justifier que r est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dont on précisera le centre.
- (e) Quelle est l'image de O par r ?
- (f) En déduire que (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

2. En utilisant les nombres complexes

- (a) Donner les écritures complexes de s_1 et de s_2 . On utilisera les résultats de la question 1.a)
- (b) En déduire les affixes z_M et z_N des points M et N .
- (c) Donner sans justification l'affixe z_P du point P puis démontrer que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.