

DEVOIR SURVEILLE N° 3 (sujet b)

Le barème n'est pas définitif, il est seulement donné à titre indicatif

Exercice 1 : (8 points)

Les diverses questions de cet exercice sont indépendantes

1. **Question de cours** : Énoncer le petit théorème de Fermat. Quel corollaire peut-on déduire ? Démontrer le corollaire en admettant le petit théorème de Fermat.
2. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en **justifiant** vos choix avec précision.
 - (a) $(1693)^{2011} \equiv 3 \pmod{13}$
 - (b) Il y a une infinité de nombres n entiers tels que $\frac{n-6}{15}$ et $\frac{n-5}{12}$ soient tous les deux entiers.
 - (c) $\text{PGCD}(3^{31} - 3; 1581) = 3$.
 - (d) Soit p un nombre premier différent de 2. Alors $p^2 + 7$ n'est pas premier.
 - (e) $n^{13} - n$ est divisible par 130 pour tout entier naturel n .
3. Une bande de 17 pirates s'est emparée d'un butin composé de pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager équitablement et de donner le reste au cuisinier. Celui-ci recevrait alors 3 pièces. Mais le bateau fait naufrage et seuls le butin, 6 pirates et le cuisinier sont sauvés : le partage laisserait alors 5 pièces d'or au cuisinier.
Déterminer la fortune minimale que peut espérer le cuisinier quand il décide d'empoisonner le reste des pirates avec du civet de rat.

Exercice 2 : (7 points)

1.
 - (a) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 ? Justifier.
 - (b) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5 ? Justifier.
 - (c) En déduire que $6^{40} \equiv 1 \pmod{11}$ et que $6^{40} \equiv 1 \pmod{5}$.
 - (d) Démontrer que $6^{40} - 1$ est divisible par 55.
2. Dans cette question, x et y désignent des entiers relatifs.
 - (a) **Question de cours** : Soit a , b et c des nombres entiers relatifs.
A quelle condition nécessaire et suffisante l'équation $ax + by = c$ admet-elle au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$? Démontrer cette équivalence.
 - (b) Montrer que l'équation (E) : $65x - 40y = 1$ n'a pas de solution.
 - (c) Montrer que l'équation (E') : $17x - 40y = 1$ admet au moins une solution.
 - (d) Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E') .
 - (e) Résoudre l'équation (E') .
En déduire qu'il existe un unique naturel x_0 inférieur à 40 tel que $17x_0 \equiv 1 \pmod{40}$.
3. Pour tout entier naturel a , démontrer que si $a^{17} \equiv b \pmod{55}$ et si $a^{40} \equiv 1 \pmod{55}$ alors $b^{33} \equiv a \pmod{55}$.

Exercice 3 (5 points)

PARTIE A

1. **Question de cours :** Montrer que si n n'est pas premier, alors il admet au moins un diviseur p premier tel que $p \leq \sqrt{n}$.
2. Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 100 : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.
Le nombre 1303 est-il premier ? Justifier précisément votre réponse.
3. Déterminer l'ensemble des couples $(a ; b)$ d'entiers naturels admettant pour somme 19545 et dont le $PGCD$ vaut 1303.

PARTIE B

On considère l'équation (E) d'inconnue n appartenant à $\mathbb{N}$:

$$(E) \quad n^2 - Sn + 19545 = 0 \text{ où } S \text{ est un entier naturel}$$

On s'intéresse à des valeurs de S telles que (E) admette deux solutions dans $\mathbb{N}$.

1. Peut-on déterminer un entier S tel que 5 soit solution de (E) ?
Si oui, préciser la deuxième solution.
2. Peut-on déterminer un entier S tel que 2 soit solution de (E) ?
3. Montrer que tout entier n solution de (E) est un diviseur de 19545.
En déduire toutes les valeurs possibles de S telles que (E) admette deux solutions entières.