DEVOIR SURVEILLE N° 3 (sujet a)

Le barème n'est pas définitif, il est seulement donné à titre indicatif

Exercice 1 : (8 points)

Les diverses questions de cet exercice sont indépendantes

1. **Question de cours** : Enoncer le petit théorème de Fermat. Quel corollaire peut-on déduire ? Démontrer le corollaire en admettant le petit théorème de Fermat.
2. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en **justifiant** vos choix avec précision.
   (a) Soit p un nombre premier différent de 2. Alors $p^2 + 3$ n'est pas premier.
   (b) $(1789)^{2005} \equiv 4\ [17]$
   (c) Il y a une infinité de nombres n entiers tels que $\dfrac{n-4}{18}$ et $\dfrac{n-3}{12}$ soient tous les deux entiers.
   (d) $n^7 - n$ est divisible par 42 pour tout entier naturel n.
   (e) $PGCD(3^{37} - 3\,;\,1221) = 3$.
3. Une bande de 23 pirates s'est emparée d'un butin composé de pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager équitablement et de donner le reste au cuisinier. Celui-ci recevrait alors 4 pièces. Mais le bateau fait naufrage et seuls le butin, 8 pirates et le cuisinier sont sauvés : le partage laisserait alors 7 pièces d'or au cuisinier.
   Déterminer la fortune minimale que peut espérer le cuisinier quand il décide d'empoisonner le reste des pirates avec du civet de rat.

Exercice 2 : (7 points)

1. (a) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 ? Justifier.
   (b) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5 ? Justifier.
   (c) En déduire que $6^{40} \equiv 1\ [11]$ et que $6^{40} \equiv 1\ [5]$.
   (d) Démontrer que $6^{40} - 1$ est divisible par 55.
2. Dans cette question, x et y désignent des entiers relatifs.
   (a) **Question de cours** : Soit a, b et c des nombres entiers relatifs.
   A quelle condition nécessaire et suffisante l'équation $ax + by = c$ admet-elle au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$? Démontrer cette équivalence.
   (b) Montrer que l'équation (E) : $65x - 40y = 1$ n'a pas de solution.
   (c) Montrer que l'équation (E') : $17x - 40y = 1$ admet au moins une solution.
   (d) Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E').
   (e) Résoudre l'équation (E').
   En déduire qu'il existe un unique naturel x_0 inférieur à 40 tel que $17\,x_0 \equiv 1\ [40]$.
3. Pour tout entier naturel a, démontrer que si $a^{17} \equiv b\ [55]$ et si $a^{40} \equiv 1\ [55]$ alors $b^{33} \equiv a\ [55]$.

Exercice 3 (5 points)

PARTIE A

1. **Question de cours :** Montrer que si n n'est pas premier, alors il admet au moins un diviseur p premier tel que $p \leqslant \sqrt{n}$.
2. Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 100 : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.
   Le nombre 1303 est-il premier ? Justifier précisément votre réponse.
3. Déterminer l'ensemble des couples $(a\,;\,b)$ d'entiers naturels admettant pour somme 19545 et dont le $PGCD$ vaut 1303.

PARTIE B

On considère l'équation (E) d'inconnue n appartenant à $\mathbb{N}$:

$$(E) \quad n^2 - Sn + 19545 = 0 \text{ où } S \text{ est un entier naturel}$$

On s'intéresse à des valeurs de S telles que (E) admette deux solutions dans $\mathbb{N}$.

1. Peut-on déterminer un entier S tel que 3 soit solution de (E) ?
   Si oui, préciser la deuxième solution.
2. Peut-on déterminer un entier S tel que 2 soit solution de (E) ?
3. Montrer que tout entier n solution de (E) est un diviseur de 19545.
   En déduire toutes les valeurs possibles de S telles que (E) admette deux solutions entières.