DEVOIR SURVEILLE N° 2 (sujet a)

Le barème n'est pas définitif, il est seulement donné à titre indicatif

Exercice 1 : *Applications directes du cours* (6 points)

Les 4 questions suivantes sont indépendantes

1. On pose $d = PGCD(481, 1404)$.
   (a) Calculer la valeur de d en utilisant l'algorithme d'Euclide.
   (b) Déterminer un couple d'entiers $(u\,;\,v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $481u + 1404v = d$.
2. On suppose connue l'identité de Bézout.
   (a) Enoncer et démontrer le théorème de Bézout.
   (b) Démontrer à l'aide du théorème de Bézout que $n+1$ et n^2 sont premiers entre eux pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Soit $n \in \mathbb{Z}$.
   (a) Déterminer $PGCD(n^2 + n - 9\,;\, n-2)$ suivant les valeurs de n.
   (b) En déduire $PGCD(n^3 + 4n^2 - 6n - 27\,;\, n^2 + n - 6)$ suivant les valeurs de n.
4. *Dire si les phrases suivantes sont vraies ou fausses en* ***justifiant*** *précisément vos réponses*
   (a) On considère $(E) : x^2 + y^2 \equiv 0\ [3]$ où $(x\,;\,,\,y)$ est un couple d'entiers relatifs.
   Il existe des couples $(x\,;\,y)$ d'entiers relatifs solutions de (E) qui ne sont pas des couples de multiples de 3.
   (b) S'il existe un couple d'entiers $(u\,;\,v)$ tels que $au + bv = 5$ alors $PGCD(a\,;\,b) = 5$.
   (c) $3a + b$ et $a - 2b$ sont premiers entre eux si et seulement si a et b sont premiers entre eux.

Exercice 2 : *Puissances de 3* (5 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. (a) Pour $1 \leqslant n \leqslant 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.
   (b) Démontrer que, pour tout n, $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.
   En déduire que 3^n et 3^{n+6} ont le même reste dans la division par 7.
   (c) A l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7.
   (d) De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n entier naturel quelconque ?
   (e) En déduire que pour tout entier naturel n, 3^n est premier avec 7.
2. Soit $A_n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} 3^i$, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   (a) Montrer que si A_n est divisible par 7, alors $3^n - 1$ est divisible par 7.
   (b) Réciproquement, montrer que si $3^n - 1$ est divisible par 7, alors A_n est divisible par 7.
   En déduire les valeurs de n telles que A_n soit divisible par 7.

<u>Exercice 3</u> : *Suite récurrente* (9 points)

PARTIE A - (ROC)

1. *On suppose connu le théorème de Bézout.*
   Enoncer et démontrer le théorème de Gauss.
2. Soit a et b deux nombres premiers entre eux et N un nombre entier naturel.
   A quelle condition nécessaire et suffisante le nombre N est-il divisible par ab ?
   Démontrer cette équivalence.
3. En déduire que : $N \equiv 28\ [100] \Leftrightarrow \begin{cases} N \equiv 0\ [4] \\ N \equiv 3\ [25] \end{cases}$

PARTIE B

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par : $\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6 \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
   Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n\ [4]$.
   En déduire que pour tout entier naturel k, $u_{2k} \equiv 2\ [4]$ et $u_{2k+1} \equiv 0\ [4]$.
3. (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.
   (b) En déduire (en utilisant la partie A) que pour tout entier naturel n, $2u_n \equiv 28\ [100]$.
4. (a) Montrer que si n est pair, $2u_n \equiv 28\ [200]$ et $u_{n+1} \equiv 64\ [500]$
   (b) En déduire les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.
5. (a) Montrer que u_{n+1} est divisible par 3 si et seulement si u_n est divisible par 3.
   (b) Montrer que le $PGCD$ de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant. Préciser sa valeur.