DEVOIR SURVEILLE N° 1 (sujet b)

Le barème n'est pas définitif, il est seulement donné à titre indicatif - La calculatrice est interdite

Exercice 1 : *Applications directes du cours* (8,5 points)

Les 6 questions suivantes sont indépendantes

1. Soit n et a deux entiers naturels. On suppose que a divise à la fois $(n+1)$ et (n^2-n+5).
   (a) Montrer que a divise $2n-5$
   (b) Quelles sont les valeurs possibles du nombre a ?

2. Réaliser la division euclidienne de -200204 par 47.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5^n - 1 - 4n$ est divisible par 16.

4. Soit $n \geqslant 2$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $A = 8n^2 - 4$ par :

   a) 2 *b)* 8 *c)* n *d)* n^2-1

5. Un nombre N est écrit $\overline{pkjm}$ en base 10 ; son symétrique M s'écrit $\overline{mjkp}$.
   (a) Démontrer que $N \equiv -p+k-j+m$ [11]
   (b) Démontrer que $N+M$ est divisible par 11.
   (c) Déterminer un multiple de 11 comportant quatre chiffres tel que ses quatre chiffres ne soient pas tous égaux.

6. Arthur monte un escalier quatre marches par quatre. A la fin, il lui reste trois marches à monter. Il sait par ailleurs que l'escalier compte entre 80 et 91 marches.
   (a) Combien de pas peut-il avoir fait et combien de marches peut compter l'escalier ?
   (b) Claire a, quant à elle, monté le même escalier, trois marches par trois et il lui restait deux marches à monter à la fin.
   Donner le nombre de marches de l'escalier et le nombre de pas faits par Claire.

Exercice 2 : *Vrai ou faux* (4,5 points)

Dire si les phrases sont vraies ou fausses en justifiant précisément vos réponses

1. 9900 admet 54 diviseurs.
2. Si $a^2 \equiv 9$ $[b]$, alors $a \equiv 3$ $[b]$.
3. Si un nombre est divisible par 9 et par 6, il est divisible par 54.
4. Si $a \equiv 7$ $[n]$, le reste de la division euclidienne de a par n vaut 7.
5. On suppose que $a \equiv -7$ [12].
   (a) Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 5 + 12k$.
   (b) $7 + a$ est pair
   (c) Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 12 - 7k$
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 3.
7. Si $a \equiv 6$ $[n]$, alors $\frac{a}{2} \equiv 3$ $[n]$.

Exercice 3 : *Restitution organisée de connaissances* (7 points)

1. Soit a, b, d et d des entiers relatifs.
   (a) Rappeler la définition de $a \equiv b$ [7] puis donner (sans la démontrer) une caractérisation de cette congruence en terme de divisibilité.
   (b) Démontrer que si $a \equiv b$ [7] et $c \equiv d$ [7], alors $ac \equiv bd$ [7]
   (c) En déduire que pour a et b entiers relatifs non nuls : si $a \equiv b$ [7], alors pour tout entier naturel n, $a^n \equiv b^n$ [7].

2. (a) Pour $a = 2$ puis $a = 3$, déterminer un entier naturel non nul tel que $a^n \equiv 1$ [7].
   (b) Par distinction de cas, démontrer que pour tout entier naturel a non divisible par 7, $a^6 \equiv 1$ [7].

3. a est un entier naturel non divisible par 7.
   On appelle ordre de a modulo 7 et on désigne par k, le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1$ [7].
   (a) Soit r le reste de la division euclidienne de 6 par k. On note N le nombre entier appartenant à $[0\,;6]$ tel que $a^r \equiv N$ [7]. Montrer que $N = 1$ et en déduire que k divise 6.
   Quelles sont les valeurs possibles de k ?
   (b) Donner l'ordre modulo 7 de tous les nombres entiers compris entre 2 et 6.

4. A tout entier naturel n, on associe le nombre $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$.
   Montrer que $A_{2006} \equiv 6$ [7].