DEVOIR SURVEILLE N° 1 (sujet a)

Le barème n'est pas définitif, il est seulement donné à titre indicatif - La calculatrice est interdite

Exercice 1 : Applications directes du cours (8,5 points)

Les 6 questions suivantes sont indépendantes

- Soit n et a deux entiers naturels. On suppose que a divise à la fois $(n - 1)$ et $(n^2 + n + 3)$.
 - Montrer que a divise $2n + 3$
 - Quelles sont les valeurs possibles du nombre a ?
- Réaliser la division euclidienne de -205362 par 43 .
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1 - 3n$ est divisible par 9 .
- Soit $n \geq 2$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $A = 9n^2 - 3$ par :
 - 3
 - 9
 - n
 - $n^2 - 1$
- Un nombre N est écrit $\overline{mcd u}$ en base 10 ; son symétrique M s'écrit $\overline{udcm}$.
 - Démontrer que $N \equiv -m + c - d + u \pmod{11}$
 - Démontrer que $N + M$ est divisible par 11 .
 - Déterminer un multiple de 11 comportant quatre chiffres tel que ses quatre chiffres ne soient pas tous égaux.
- Arthur monte un escalier trois marches par trois. A la fin, il lui reste deux marches à monter. Il sait par ailleurs que l'escalier compte entre 80 et 90 marches.
 - Combien de pas peut-il avoir fait et combien de marches peut compter l'escalier ?
 - Claire a, quant à elle, monté le même escalier, quatre marches par quatre et il lui restait trois marches à monter à la fin.
Donner le nombre de marches de l'escalier et le nombre de pas faits par Claire.

Exercice 2 : Vrai ou faux (4,5 points)

Dire si les phrases sont vraies ou fausses en justifiant précisément vos réponses

- Si un nombre est divisible par 4 et par 6 , il est divisible par 24 .
- Si $a \equiv 4 \pmod{n}$, alors $\frac{a}{2} \equiv 2 \pmod{n}$.
- On suppose que $a \equiv -5 \pmod{12}$.
 - Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 12 - 5k$
 - $5 + a$ est pair
 - Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 7 + 12k$.
- 6300 admet 54 diviseurs.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n + 1)(2n + 1)$ est divisible par 3 .
- Si $a \equiv 5 \pmod{n}$, le reste de la division euclidienne de a par n vaut 5 .
- Si $a^2 \equiv 4 \pmod{b}$, alors $a \equiv 2 \pmod{b}$.

Exercice 3 : Restitution organisée de connaissances (7 points)

1. Soit a, b, d et d des entiers relatifs.
 - (a) Rappeler la définition de $a \equiv b [7]$ puis donner (sans la démontrer) une caractérisation de cette congruence en terme de divisibilité.
 - (b) Démontrer que si $a \equiv b [7]$ et $c \equiv d [7]$, alors $ac \equiv bd [7]$
 - (c) En déduire que pour a et b entiers relatifs non nuls : si $a \equiv b [7]$, alors pour tout entier naturel n , $a^n \equiv b^n [7]$.
2.
 - (a) Pour $a = 2$ puis $a = 3$, déterminer un entier naturel non nul tel que $a^n \equiv 1 [7]$.
 - (b) Par distinction de cas, démontrer que pour tout entier naturel a non divisible par 7, $a^6 \equiv 1 [7]$.
3. a est un entier naturel non divisible par 7.

On appelle ordre de a modulo 7 et on désigne par k , le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1 [7]$.

 - (a) Soit r le reste de la division euclidienne de 6 par k . On note N le nombre entier appartenant à $[0; 6]$ tel que $a^r \equiv N [7]$. Montrer que $N = 1$ et en déduire que k divise 6.
Quelles sont les valeurs possibles de k ?
 - (b) Donner l'ordre modulo 7 de tous les nombres entiers compris entre 2 et 6.
4. A tout entier naturel n , on associe le nombre $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$.
Montrer que $A_{2006} \equiv 6 [7]$.