

DEVOIR A LA MAISON N° 1

A RENDRE LE VENDREDI 24 SEPTEMBRE

Exercice 1 : Nombres parfaits

Définition : Dire qu'un entier naturel n est parfait signifie que la somme de tous ses diviseurs positifs est égale à $2n$.

1. Soit $a = 2^2(2^3 - 1) = 2^2 \times 7$.
Démontrer que la somme des diviseurs positifs de a est le résultat du produit $(1 + 2 + 2^2)(1 + 7)$.
2. p désigne un nombre premier tel que $2^p - 1$ soit premier.
 - (a) Déterminer les diviseurs positifs de 2^{p-1} .
 - (b) Déterminer les diviseurs positifs de $2^p - 1$.
 - (c) Calculer la somme des diviseurs positifs de l'entier $E_p = 2^{p-1}(2^p - 1)$.
Remarque : les nombres E_p sont appelés nombres d'Euclide.
 - (d) En déduire que $2^{p-1}(2^p - 1)$ est un nombre parfait.
 - (e) Déterminer trois nombres parfaits.
3. p et q désignent des nombres premiers distincts supérieurs ou égaux à 3, et α et β sont des entiers naturels non nuls. On note $n = p^\alpha q^\beta$.
 - (a) Déterminer les diviseurs positifs de p^α et q^β .
 - (b) Démontrer que la somme S des diviseurs positifs de n est donnée par $S = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1} \times \frac{q^{\beta+1} - 1}{q - 1}$.
 - (c) Démontrer que n est parfait, si et seulement si : $p^\alpha q^\beta [(p - 2)(q - 2) - 2] = 1 - p^{\alpha+1} - q^{\beta+1}$.
 - (d) En étudiant le signe de chaque membre, démontrer qu'il ne peut pas exister de nombres parfaits impairs dont la décomposition en produit de facteurs premiers ne contienne que deux facteurs premiers distincts.
 - (e) Démontrer que s'il existe un nombre parfait impair, il est supérieur à 105.
Remarque : on ne sait pas, à l'heure actuelle, s'il existe des nombres parfaits impairs

Exercice 2 : FACULTATIF

Deux amis se rencontrent dans un bus.

- Comment ça va ?
- Ça va et toi, ça va ?
- Ça va merci. Tu venais de te marier la dernière fois que je t'ai vu, tu as des enfants ?
- J'en ai trois !
- Diable ! Quel âge ont-ils ?
- Eh bien, si tu multiplies leurs âges, tu trouves 36, mais si tu les ajoutes, tu auras le nombre de passagers du bus.
- Oh la la ! tu ne m'en dis pas assez pour que je puisse les trouver !
- Mon aîné aime le sport.
- Ah ! ... je connais leur âge.

Quel est le nombre de passagers du bus ?