

DEVOIR A LA MAISON N°3

A RENDRE LE VENDREDI 6 DECEMBRE

Exercice 1 : Partie B du sujet D p.38

Exercice 2 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Conjecturer, en étudiant les valeurs de n inférieures ou égales à 6, le reste de la division euclidienne de 7^n par 9.
 - (b) Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $7^{3k} \equiv 1 [9]$.
 - (c) En déduire, en fonction du reste de la division euclidienne de n par 3, le reste de la division euclidienne de 7^n par 9.
 - (d) Démontrer alors que $(2014)^{2014} \equiv 7 [9]$.
2.
 - (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $10^n \equiv 1 [9]$.
 - (b) Soit $N = \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0}$ l'écriture en base 10 de N (le nombre a_0 est le chiffre des unités, le nombre a_1 celui des dizaines, ...). On appelle S la somme de des chiffres.
Démontrer que $N \equiv S [9]$.
 - (c) En déduire que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9.
3. On suppose que $A = (2014)^{2014}$; on désigne par :
 - B la somme des chiffres de A ;
 - C la somme des chiffres de B
 - D la somme des chiffres de C .
 - (a) Démontrer que $A \equiv D [9]$.
 - (b) Sachant que $2014 < 10000$, démontrer que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8056 chiffres et en déduire que $B \leq 72504$
 - (c) Démontrer que $C \leq 45$.
 - (d) En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de D plus petit que 12.
 - (e) Démontrer que $D = 7$.