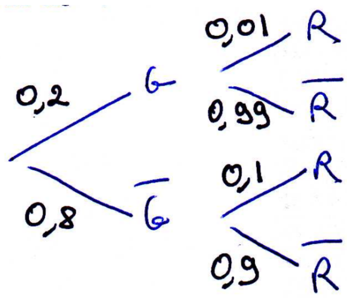
CORRECTION DU SUJET DE BAC "Nouvelle Calédonie 2019"

Exercice 1 :

Partie A

1. (a) D'après l'énoncé, $P(G) = 0,2$, $P_G R = 0,01$ et $P_{\overline{G}}(R) = 0,1$.

   On en déduit que $P(\overline{G}) = 1 - P(G) = 1 - 0,2 = 0,8$,
   $P_G(\overline{R}) = 1 - P_G(R) = 1 - 0,01 = 0,99$ et
   $P_{\overline{G}}(\overline{R}) = 1 - P_{\overline{G}}(R) = 1 - 0,1 = 0,9$.
   On en déduit l'arbre pondéré ci-contre.



   (b) $P(G \cap R) = P(G) \times P_G(R) = 0,2 \times 0,01 = 0,002$.

   (c) Comme $\{G\,;\,\overline{G}\}$ est une partition de l'univers, alors, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(R) &= P(G \cap R) + P\left(\overline{G} \cap R\right) = 0,002 + P(\overline{G}) \times P_{\overline{G}}(R) \\ &= 0,002 + 0,8 \times 0,1 = 0,002 + 0,08 = 0,082 \end{aligned}$$

   (d) $P_R(G) = \dfrac{P(G \cap R)}{P(R)} = \dfrac{0,002}{0,082} = \dfrac{2}{82} = \dfrac{1}{41} \simeq 0,024$.

2. $P(X = 0) = P(G) = 0,2$; $P(X = 100) = P(\overline{G} \cap \overline{R}) = p(\overline{G}) \times P_{\overline{G}}(\overline{R}) = 0,8 \times 0,9 = 0,72$ et $P(X = 500) = P(\overline{G} \cap R) = 0,8 \times 0,1 = 0,08$. Le tableau donnant la loi de probabilité de X est le suivant :

x_i	0	100	500
$P(X = x_i)$	0,2	0,72	0,08

   Finalement, $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} x_i \times P(X = x_i) = 0 \times 0,2 + 100 \times 0,72 + 500 \times 0,08 = 72 + 40 = 112$. En moyenne, pour un parc automobile de grande taille, le prix moyen de l'entretien de la voiture est de 112 euros. Pour 2500 voitures, la société de location de voitures doit prévoir $2500 \times 112 = 280\,000$ euros. Le budget annuel de 250 000 euros est donc insuffisant.

Partie B

1. Soit $p = 0,8$ la proportion théorique des cliens demandant un contrat de courte durée et $n = 600$ le nombre de contrats récemment signés. Alors $n \geqslant 30$, $np = 600 \times 0,8 = 480 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 600 \times 0,2 = 120 \geqslant 5$. On peut donc appliquer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence des contrats de courte durée

$$\begin{aligned} I &= \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[0,8 - 1,96\sqrt{\frac{0,8 \times 0,2}{600}}\,;0,8 + 1,96\sqrt{\frac{0,8 \times 0,2}{600}}\right] \\ &\simeq [0,67\,;\,0,84] \end{aligned}$$

2. La fréquence observée des contrats de courte duréee est $f = \dfrac{550}{600} \simeq 0,92$.

   Comme $f \notin I$, on peut penser que l'affirmation de la directrice concernant la poportion des contrats de courte durée est fausse, avec un risque d'erreur de 5%.

Partie C

1. D'après la calculatrice, si Y suit la loi normale $\mathcal{N}\left(450\,;\,100^2\right)$ alors $P(500 \leqslant Y \leqslant 600) \simeq 0,242$.

2. On cherche a tel que $P(Y \leqslant a) = 0,15$. A l'aide de la calculatrice, on obtient $a \simeq 346$. Un client sera concerné par cette offre s'il parcourt moins de 346 km par semaine.

Exercice 2 :

Partie A

1. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x+2 = \lim\limits_{x\mapsto+\infty} x-4 = +\infty$ par somme. Or, $\lim\limits_{X\mapsto+\infty} e^X = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} e^{x-4} = +\infty$ par composition. On en déduit que $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} (x+2)e^{x-4} = +\infty$ par produit puis $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x) = +\infty$ par somme.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = xe^{x-4} + 2e^{x-4} - 2 = \dfrac{xe^x}{e^4} + 2e^{x-4} - 2$

   On sait que $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} xe^x = 0$ par croissance comparée. On en déduit que $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{xe^x}{e^4} = 0$ par quotient.

   $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x-4 = -\infty$ par somme et $\lim\limits_{X\mapsto-\infty} e^X = 0$ d'où $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} e^{x-4} = 0$ par composition.

   Finalement, $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} g(x) = -2$ par somme.

3. $g = u \times v - 2$ avec $u(x) = x+2$ et $v(x) = e^{w(x)}$ en posant $w(x) = x-4$. On sait que $g' = u'v + v'u$ avec $v' = w'e^w$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 1 \times e^{x-4} + (x+2) \times 1 \times e^{x-4} = e^{x-4}(1+x+2) = (x+3)e^{x-4}$.

   On étudie le signe de $g'(x) = (x+3)e^{x-4}$.

   - On sait que $e^{x-4} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puisqu'une exponentielle est toujours strictement positive.
   - $x+3 = 0 \iff x = -3$ et $x \mapsto x+3$ est affine de coefficient directeur $1 > 0$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
signe de e^{x-4}		$+$	|	$+$	
signe de $x+3$		$-$	0	$+$	
signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-2	↘	$-e^{-7}-2$	↗	$+\infty$

$g(-3) = (-3+2)e^{-3-4} - 2 = -e^{-7} - 2$

4. La fonction g est décroissante sur $]-\infty\,;3]$ et $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} g(x) = -2$ donc $g(x) \leqslant -2$ pour tout $x \in]-\infty\,;3]$. En particulier, l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]-\infty\,;3]$

   g est continue sur $[3\,;+\infty[$ (car on a supposé dans l'énoncé que g est dérivable sur $\mathbb{R}$) et strictement croissante sur $[3\,;+\infty[$. De plus, $0 \in [g(3)\,;\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x)[= [-2-e^{-7}\,;+\infty[$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[3\,;+\infty[$.

   Finalement, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

5. On déduit le signe de $g(x)$ du tableau de variations de g :

x	$-\infty$		3		α		$+\infty$
$g(x)$	-2	↘	$-2-e^{-7}$	↗	0	↗	$+\infty$
signe de $g(x)$			$-$		0	$+$	

6. D'après la calculatrice, $g(3,069) \simeq -0,002$ et $g(3,07) \simeq 0,0004$ donc $g(3,069) < 0 < g(3,07)$. Ainsi, $3,069 < \alpha < 3,07$.

Partie B

1. $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-x^2e^{x-4} \Leftrightarrow x^2\left(1-e^{x-4}\right)=0 \Leftrightarrow x^2=0$ ou $1-e^{x-4}=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $e^{x-4}=1$.

   Or, $e^{x-4}=1 \Leftrightarrow e^{x-4}=e^0 \Leftrightarrow x-4=0 \Leftrightarrow x=4$.

   L'ensemble des solutions de $f(x)=0$ est $\mathcal{S}=\{0\,;\,4\}$.

2. On a admis que $f'(x)=-xg(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. On dresse le tableau de signe de $f'(x)$ pour en déduire le sens de variations de f.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
signe de $-x$		+	0	−	|	−	
signe de $g(x)$		−	|	−	0	+	
signe de $f'(x)$		−	0	+	0	−	

   La fonction f est décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et sur $[\alpha\,;\,+\infty[$, elle est croissante sur $[0\,;\,\alpha]$.

3. Comme f est croissante sur $[0\,;\,\alpha]$ et décroissante sur $[\alpha\,;\,+\infty[$, le maximum de f sur $[0\,;\,+\infty[$ est

$$f(\alpha)=\alpha^2-\alpha^2e^{\alpha-4}=\alpha^2\left(1-e^{\alpha-4}\right)$$

   Comme α est solution de $g(x)=0$ alors $g(\alpha)=(\alpha+2)e^{\alpha-4}-2=0$. Ainsi, $(\alpha+2)e^{\alpha-4}=2$.

   Or, $\alpha>3$ donc $\alpha+2\neq 0$. On en déduit que $e^{\alpha-4}=\dfrac{2}{\alpha+2}$. On remplace $e^{\alpha-4}$ par ce quotient dans l'expression de $f(\alpha)$:

$$f(\alpha)=\alpha^2\left(1-\frac{2}{\alpha+2}\right)=\alpha^2\left(\frac{\alpha+2-2}{\alpha+2}\right)=\frac{\alpha^3}{\alpha+2}$$

   Le maximum de f sur $[0\,;\,+\infty[$ est $\dfrac{\alpha^3}{\alpha+2}$.

Partie C

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)-x^2=x^2-x^2e^{x-4}-x^2=-x^2e^{x-4}$.

   Un carré est toujours positif donc $x^2\geqslant 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. On a déjà justifié que $e^{x-4}>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ donc $-x^2e^{x-4}\leqslant 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ avec $-x^2e^{x-4}=0$ seulement lorsque $x=0$.

   Comme $f(x)-x^2\leqslant 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $f(x)-x^2=0 \Leftrightarrow x=0$ alors $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de $\mathcal{P}$ sur $\mathbb{R}$, et les deux courbes se coupent à l'origine du repère.

2. Les fonctions f et $x\mapsto x^2$ sont continues sur $\mathbb{R}$, la parabole $\mathcal{P}$ est au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_f$ et $0<4$, donc l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$ correspond, en unités d'aires, à l'intégrale $\displaystyle\int_0^4 (x^2-f(x))\mathrm{d}x$. Par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^4 x^2\mathrm{d}x-\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^4-\left[\frac{1}{3}x^3-(x^2-2x+2)e^{x-4}\right]_0^4\\ &= \frac{1}{3}\times 4^3-\left(\frac{1}{3}\times 4^3-(4^2-8+2)e^{4-4}+(0^2-2\times 2+2)e^{0-4}\right)=10e^0-2e^{-4}=10-\frac{2}{e^4}\simeq 9,96\end{aligned}$$

Exercice 3 : le corrigé de cet exercice donné au bac blanc est déjà sur le site. ‘

Exercice 4 :

Partie A

1. La formule a écrire en $B3$ est $\boxed{=B2/(B2+8)}$

2. On peut conjecturer que (u_n) est décroissante

3. On peut conjecturer que (u_n) converge vers 0.

4. Algorithme :

```
u prend la valeur 0
Pour i allant de 1 à 30
   u prend la valeur u/(u+8)
   Fin du "Pour"
Afficher u
```

Partie B

1. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété P_n : "$u_n > 0$".
   - *Initialisation* pour $n = 0$, $u_0 = 1 > 0$ donc P_0 est vraie.
   - *Etape d'hérédite* On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que P_n est vraie, c'est-à-dire que $u_n > 0$. Montrons que la propriété P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} > 0$.

     On sait que $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 8}$. Comme $u_n > 0$, alors $u_n + 8 > 8 > 0$ puis $\dfrac{u_n}{u_n + 8} > 0$ comme quotient de deux nombres strictement positifs. On a ainsi prouvé que $u_{n+1} > 0$.
   - *Conclusion* D'après le principe de récurrence, $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\frac{u_n}{u_n+8}}{u_n} = \dfrac{u_n}{u_n + 8} \times \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{u_n + 8}$.

   Comme $u_n > 0$ alors $u_n + 8 > 8$ puis, en appliquant la fonction inverse strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{u_n + 8} < \dfrac{1}{8} < 1$. On a obtenu que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ avec $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela implique que $u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) est donc décroissante.

3. On a prouvé que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de convergence monotone, elle est donc convergente.

Partie C

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$v_{n+1} = 1 + \frac{7}{u_{n+1}} = 1 + \frac{7}{\frac{u_n}{u_n+8}} = 1 + 7 \times \frac{u_n + 8}{u_n} = 1 + \frac{7u_n}{u_n} + \frac{56}{u_n} = 1 + 7 + \frac{56}{u_n} = 8 + \frac{56}{u_n} = 8\left(1 + \frac{7}{u_n}\right) = 8\,v_n$$

   La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = 8$ et de premier terme $v_0 = 1 + \dfrac{7}{u_0} = 1 + \dfrac{7}{1} = 1 + 7 = 8$.

2. Comme (v_n) est géométrique, alors $v_n = v_0 \times q^n = 8 \times 8^n = 8^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   On sait que $v_n = 1 + \dfrac{7}{u_n}$ d'où $\dfrac{7}{u_n} = v_n - 1$. On a justifié que $v_n = 8^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $v_n \geqslant 8$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et, en particulier, $v_n \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut donc prendre l'inverse de chaque membre de l'égalité $\dfrac{7}{u_n} = v_n - 1$: $\dfrac{u_n}{7} = \dfrac{1}{v_n - 1}$ d'où $v_n = \dfrac{7}{v_n - 1} = \dfrac{7}{8^{n+1} - 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{7}{8^n \times 8 - 1}$. On sait que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} q^n = +\infty$ si $q > 1$ d'où $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} 8^n = +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} 8^n \times 8 = +\infty$ par produit puis que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} 8^n \times 8 - 1 = +\infty$ par somme.

   Enfin $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = 0$ par quotient.

4. Par définition de $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = 0$, tout intervalle du type $]-r\,;,r[$ (avec $r > 0$) contient tous les termes de la suite (u_n) pour n suffisamment grand. Avec $r = 10^{-18}$, cela implique qu'il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n < 10^{-18}$.

   $u_n < 10^{-18} \;\Leftrightarrow\; \dfrac{7}{8^{n+1} - 1} < 10^{-18} \;\Leftrightarrow\; \dfrac{8^{n+1} - 1}{7} > 10^{18}$ en appliquant la fonction inverse, strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
u_n < 10^{-18} \quad &\Leftrightarrow \quad 8^{n+1} - 1 > 7 \times 10^{18} \;\Leftrightarrow\; 8^{n+1} > 7 \times 10^{18} + 1 \;\Leftrightarrow\; \ln(8^{n+1}) \geqslant \ln(7 \times 10^{18} + 1) \\
&\Leftrightarrow \quad (n+1)\ln(8) \geqslant \ln(7 \times 10^{18} + 1) \;\Leftrightarrow\; n + 1 \geqslant \frac{\ln(7 \times 10^{18} + 1)}{\ln(8)} \\
&\Leftrightarrow \quad n \geqslant \frac{\ln(7 \times 10^{18} + 1)}{\ln(8)} - 1
\end{aligned}$$

Comme $\dfrac{\ln(7 \times 10^{18} + 1)}{\ln(8)} - 1 \simeq 19,9$ alors $n_0 = 20$.