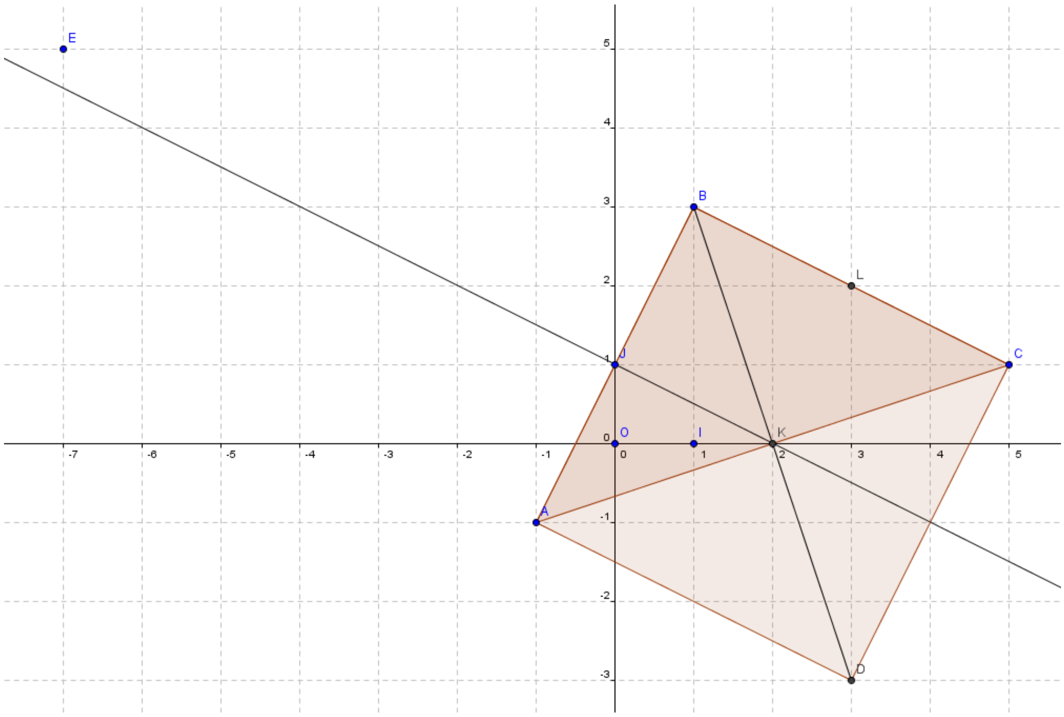
CORRECTION DE L'INTERROGATION N° 2

SUJET (a)

Exercice 1 :

1. Figure :



2. $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (1+1)^2 + (3+1)^2 = 4 + 16 = 20$
$BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = (5-1)^2 + (1+1)^2 = 16 + 4 = 20$
$AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = (5+1)^2 + (1+1)^2 = 36 + 4 = 40.$
On remarque que $AB^2 = BC^2$ et comme des distances sont toujours positives alors $AB = BC$. Cela signifie que ABC est isocèle en B.
De plus, $AB^2 + BC^2 = 20 + 20 = 40 = AC^2$ donc le triangle ABC est rectangle en B d'après la réciproque du théorème de Pythagore. Finalement, ABC est isocèle rectangle en B.

3. Comme K est le milieu de $[AC]$, on peut appliquer les formules suivantes :
$x_K = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2$ et $y_K = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-1+1}{2} = \frac{0}{2} = 0$. Finalement, $K\,(2\,;\,0)$.

4. Dire que D est le symétrique de B par rapport à K signifie que K est le milieu de $[BD]$.
Ainsi, $x_K = \frac{x_B + x_D}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{1 + x_D}{2} \Leftrightarrow 1 + x_D = 4 \Leftrightarrow x_D = 3.$
De même, $y_K = \frac{y_B + x_D}{2} \Leftrightarrow 0 = \frac{3 + y_D}{2} \Leftrightarrow 3 + y_D = 0 \Leftrightarrow y_D = -3$. Finalement, $D\,(3\,;\,-3)$.

5. On sait que K est à la fois le milieu de $[AC]$ et de $[BD]$. Les diagonales du quadrilatère $ABCD$ se coupent donc en leur milieu K. Cela implique que $ABCD$ est un parallélogramme.
En outre, ABC est un triangle isocèle rectangle en B d'après la question 2 donc $ABCD$ possède deux côtés consécutifs de même longueur ($[AB]$ et $[BC]$), ce qui fait de $ABCD$ un losange ; ainsi qu'un angle droit en B ; ce qui permet de conclure que $ABCD$ est finalement un carré.

6. $EA = \sqrt{(x_A - x_E)^2 + (y_A - y_E)^2} = \sqrt{(-1+7)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2}$
$EB = \sqrt{(x_B - x_E)^2 + (y_B - y_E)^2} = \sqrt{(1+7)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68} = \sqrt{4 \times 17} = 2\sqrt{17}.$
On remarque que $EA \neq EB$ donc E n'appartient pas à la médiatrice de $[AB]$.

7. (a) Comme $ABCD$ est un carré de centre K, on sait que (KA) et perpendiculaire à (KB) puisque les diagonales d'un carré sont perpendiculaires. De plus, les diagonales d'un carré se coupent en

leur milieu et sont de même longueur d'où $KA = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{BD}{2} = KB$. Le repère $(K\,;\,A;\,B)$ est donc un repère orthonormé.

(b) Dans ce repère on lit : $D\,(0\,;\,-1)$.

(c) On sait aussi que $B\,(0\,;\,,\,1)$ et comme C est sur l'axe des abscisses, symétrique de A par rapport à l'origine K, alors $C\,(-1\,;\,0)$. Le milieu L de $[BC]$ a pour coordonnées :
$x_L = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{0-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$ et $y_L = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{1+0}{2} = -\dfrac{1}{2}$. Finalement, $L\left(-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$.

Exercice 2 :

1.

$$\begin{aligned} A &= x(x-2) + (4-2x)(7x-5) = x(x-2) + 2(2-x)(7x-5) = x(x-2) - 2(x-2)(7x-5) \\ &= (x-2)\,[x - 2(7x-5)] = (x-2)(x-14x+10) = (x-2)(-13x+10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (3x+1)^2 - 4(x+1)^2 = (3x+1)^2 - [2(x+1)]^2 = [3x+1-2(x+1)]\,[3x+1+2(x+1)] \\ &= (3x+1-2x-2)(3x+1+2x+2) = (x-1)(5x+3) \end{aligned}$$

2. (a)

$$\begin{aligned} 2 - \frac{1}{3}(x-1) + \frac{5}{4}(3-2x) = 4 \quad &\Leftrightarrow \quad 2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + \frac{15}{4} - \frac{5}{2}x = 4 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x - \frac{5}{2}x = 4 - 2 - \frac{1}{3} - \frac{15}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{2}{6}x - \frac{15}{6}x = 2 - \frac{4}{12} - \frac{45}{12} \Leftrightarrow -\frac{17}{6}x = \frac{24-49}{12} \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{17}{6}x = -\frac{25}{12} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{25}{12}}{\frac{17}{6}} = \frac{25}{12} \times \frac{6}{17} = \frac{25}{17 \times 2} = \frac{25}{34} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{25}{34}\right\}$.

(b) $3x^2 = 9x \Leftrightarrow 3x^2 - 9x = 0 \Leftrightarrow 3x(x-3) = 0 \Leftrightarrow x(x-3) = 0$. Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. On obtient : $x = 0$ ou $x - 3 = 0$ soit $x = 0$ ou $x = 3$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{0\,;\,3\}$.

3. (a) $(2x-13)(2x-7) = 4x^2 - 14x - 26x + 13 \times 7 = 4x^2 - 40x + 91 = f(x)$.

(b) On résout $f(x) = 0 \Leftrightarrow (2x-13)(2x-7) = 0$. Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. On obtient : $2x-13 = 0$ ou $2x-7 = 0$. Or, $2x-13 = 0 \Leftrightarrow 2x = 13 \Leftrightarrow x = \dfrac{13}{2}$ et $2x - 7 = 0 \Leftrightarrow 2x = 7 \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{2}$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{13}{2}\,;\,\dfrac{7}{2}\right\}$.

Exercice 3 :

1. (a) m est le minimum de f sur un intervalle I signifie que :
   - $f(x) \geqslant m$ pour tout $x \in I$.
   - m admet un antécédent par f.

(b) Un carré est toujours positif donc $(x-4)^2 \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On multiplie par le nombre positif 2 d'où $2(x-4)^2 \geqslant 0$ et en ajoutant -1 : $2(x-4)^2 - 1 \geqslant -1$ soit $f(x) \geqslant -1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
De plus :

$$f(x) = -1 \Leftrightarrow 2(x-4)^2 - 1 = -1 \Leftrightarrow 2(x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

On en déduit que -1 est le minimum de f sur $\mathbb{R}$ et il est atteint en 4.

2. (a) On sait que $5 = \dfrac{15}{3}$ et $6 = \dfrac{18}{3}$ d'où $4 < 5 < \dfrac{17}{3} < 6$. La fonction f étant décroissante sur $[4\,;\,6]$ alors $f(5) \geqslant f\left(\dfrac{17}{3}\right)$.

La phrase est fausse.

(b) $f(x) \leqslant 3$ pour tout $x \in [-2\,;\,6]$ ne suffit pas à affirmer que 3 est le maximum de f : il est possible que 3 n'admette pas d'antécédent par f. Voir annexe pour la proposition d'un contre-exemple

La phrase est fausse.

(c) Comme -2 est le minimum de f alors $f(x) \geqslant -2$ pour tout $x \in [4\,;\,6]$. De plus, si $4 \leqslant x \leqslant 6$ alors $f(4) \geqslant f(x)$ puisque la fonction f est décroissante sur $[4\,;\,6]$. Or on sait que 4 est un antécédent de 2 par f donc $f(4) = 2$. On en déduit que $f(x) \leqslant 2$ pour tout $x \in [4\,;\,6]$. On a finalement justifié que $-2 \leqslant f(x) \leqslant 2$ pour tout $x \in [4\,;\,6]$.

La phrase est vraie.

(d) **La phrase est fausse** : voir annexe pour la proposition d'un contre-exemple

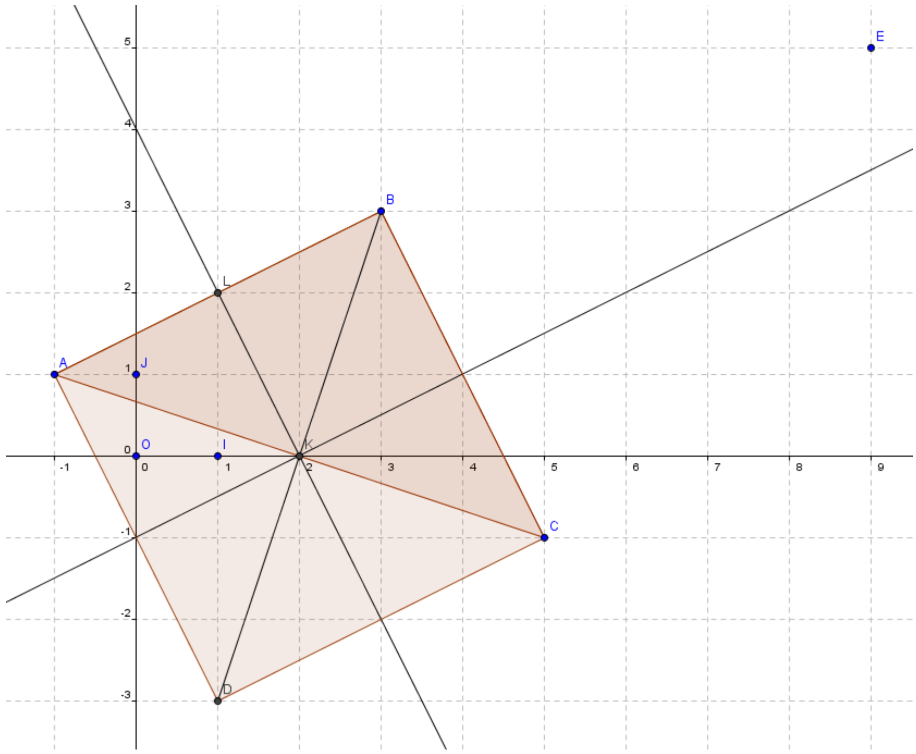
(e) On suppose que $-2 \leqslant x \leqslant 1$. On sait que la fonction f est croissante sur $[-2\,;\,1]$ d'où $f(-2) \leqslant f(x)$. Or, le point de coordonnées $(-2\,;\,0)$ appartient à $\mathcal{C}_f$ donc $f(-2) = 0$. Cela implique alors que $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [-2\,;\,1]$.

La phrase est vraie.

SUJET (b)

Exercice 1 :

1. Figure :



2. $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (3+1)^2 + (3-1)^2 = 16 + 4 = 20$
   $BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = (5-3)^2 + (-1-3)^2 = 4 + 16 = 20$
   $AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = (5+1)^2 + (-1-1)^2 = 36 + 4 = 40.$
   On remarque que $AB^2 = BC^2$ et comme des distances sont toujours positives alors $AB = BC$. Cela signifie que ABC est isocèle en B.
   De plus, $AB^2 + BC^2 = 20 + 20 = 40 = AC^2$ donc le triangle ABC est rectangle en B d'après la réciproque du théorème de Pythagore. Finalement, ABC est isocèle rectangle en B.

3. Comme K est le milieu de $[AC]$, on peut appliquer les formules suivantes :
   $x_K = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{-1+5}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$ et $y_K = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{1-1}{2} = \dfrac{0}{2} = 0$. Finalement, $K\,(2\,;\,0)$.

4. Dire que D est le symétrique de B par rapport à K signifie que K est le milieu de $[BD]$.
   Ainsi, $x_K = \dfrac{x_B + x_D}{2} \Leftrightarrow 2 = \dfrac{3 + x_D}{2} \Leftrightarrow 3 + x_D = 4 \Leftrightarrow x_D = 1.$
   De même, $y_K = \dfrac{y_B + y_D}{2} \Leftrightarrow 0 = \dfrac{3 + x_D}{2} \Leftrightarrow 3 + y_D = 0 \Leftrightarrow y_D = -3$. Finalement, $D\,(1\,;\,-3)$.

5. On sait que K est à la fois le milieu de $[AC]$ et de $[BD]$. Les diagonales du quadrilatère $ABCD$ se coupent donc en leur milieu K. Cela implique que $ABCD$ est un parallélogramme.
   En outre, ABC est un triangle isocèle rectangle en B d'après la question 2 donc $ABCD$ possède deux côtés consécutifs de même longueur ($[AB]$ et $[BC]$), ce qui fait de $ABCD$ un losange ; ainsi qu'un angle droit en B ; ce qui permet de conclure que $ABCD$ est finalement un carré.

6. $EB = \sqrt{(x_B - x_E)^2 + (y_B - y_E)^2} = \sqrt{(3-9)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = \sqrt{4 \times 10} = 2\sqrt{10}$
   $EC = \sqrt{(x_C - x_E)^2 + (y_C - y_E)^2} = \sqrt{(5-9)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = \sqrt{4 \times 13} = 2\sqrt{13}.$
   On remarque que $EB \neq EC$ donc E n'appartient pas à la médiatrice de $[BC]$.

7. (a) Comme $ABCD$ est un carré de centre K, on sait que (KB) et perpendiculaire à (KC) puisque les diagonales d'un carré sont perpendiculaires. De plus, les diagonales d'un carré se coupent en leur milieu et sont de même longueur d'où $KB = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{AC}{2} = KC$. Le repère $(K\,;\,B\,;\,C)$ est donc un repère orthonormé.

   (b) Dans ce repère on lit : $D\,(-1\,;\,0)$.

(c) On sait aussi que $B\,(1\,;\,,\,0)$ et comme A est sur l'axe des ordonnées, symétrique de C par rapport à l'origine K, alors $A\,(0\,;\,-1)$. Le milieu L de $[AB]$ a pour coordonnées :
$x_L = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{0+1}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $y_L = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{-1+0}{2} = -\dfrac{1}{2}$. Finalement, $L\left(\dfrac{1}{2}\,;\,-\dfrac{1}{2}\right)$.

Exercice 2 :

1.

$$\begin{aligned} A &= x(3-x)+(4x-12)(2x-5) = x(3-x)+4(x-3)(2x-5) = x(3-x)-4(3-x)(2x-5) \\ &= (3-x)\left[x-4(2x-5)\right] = (3-x)(x-8x+20) = (3-x)(-7x+20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (2x+1)^2-9(x+2)^2 = (2x+1)^2-\left[3(x+2)\right]^2 = \left[2x+1-3(x+2)\right]\left[2x+1+3(x+2)\right] \\ &= (2x+1-3x-6)(2x+1+3x+6) = (-x-5)(5x+7) \end{aligned}$$

2. (a)

$$\begin{aligned} 3-\frac{1}{4}(2x-1)+\frac{5}{6}(7-2x)=2 &\Leftrightarrow 3-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+\frac{35}{6}-\frac{5}{3}x=2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x-\frac{5}{3}x=2-3-\frac{1}{4}-\frac{35}{6} \\ &\Leftrightarrow -\frac{3}{6}x-\frac{10}{6}x=-1-\frac{3}{12}-\frac{70}{12} \Leftrightarrow -\frac{13}{6}x=\frac{-12-73}{12} \\ &\Leftrightarrow -\frac{13}{6}x=-\frac{85}{12} \Leftrightarrow x=\frac{\frac{85}{12}}{\frac{13}{6}}=\frac{85}{12}\times\frac{6}{13}=\frac{85}{13\times 2}=\frac{85}{26} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{85}{26}\right\}$.

(b) $2x^2=4x \;\Leftrightarrow\; 2x^2-4x=0 \;\Leftrightarrow\; 2x(x-2)=0 \;\Leftrightarrow\; x(x-2)=0$. Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. On obtient : $x=0$ ou $x-2=0$ soit $x=0$ ou $x=2$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\{0\,;\,2\}$.

3. (a) $(3x-11)(3x-4)=9x^2-12x-33x+44=9x^2-45x+44=f(x)$.

(b) On résout $f(x)=0 \;\Leftrightarrow\; (3x-11)(3x-4)=0$. Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. On obtient : $3x-11=0$ ou $3x-4=0$. Or, $3x-11=0 \;\Leftrightarrow\; 3x=11 \;\Leftrightarrow\; x=\dfrac{11}{3}$ et $3x-4=0 \;\Leftrightarrow\; 3x=4 \;\Leftrightarrow\; x=\dfrac{4}{3}$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{11}{3}\,;\,\dfrac{4}{3}\right\}$.

Exercice 3 :

1. (a) M est le minimum de f sur un intervalle I signifie que :
   - $f(x)\leqslant M$ pour tout $x\in I$.
   - M admet un antécédent par f.

(b) Un carré est toujours positif donc $(x-3)^2\geqslant 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. On multiplie par le nombre négatif -5 d'où $-5(x-3)^2\leqslant 0$ et en ajoutant 1 : $1-5(x-3)^2\leqslant 1$ soit $f(x)\leqslant 1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
De plus :

$$f(x)=1 \;\Leftrightarrow\; 1-5(x-3)^2=1 \;\Leftrightarrow\; -5(x-3)^2=0 \;\Leftrightarrow\; (x-3)^2=0 \;\Leftrightarrow\; x-3=0 \;\Leftrightarrow\; x=3$$

On en déduit que 1 est le maximum de f sur $\mathbb{R}$ et il est atteint en 3.

2. (a) **La phrase est fausse** : voir annexe pour la proposition d'un contre-exemple

(b) On suppose que $-3\leqslant x\leqslant 2$. La fonction f est décroissante sur $[-3\,;\,2]$ d'où $f(-3)\geqslant f(x)$. Or, le point de coordonnées $(-3\,;\,0)$ appartient à $\mathcal{C}_f$ donc $f(-3)=0$. Cela implique alors que $f(x)\leqslant 0$ pour tout $x\in[-3\,;\,2]$.

La phrase est vraie.

(c) On sait que $5 = \dfrac{15}{3}$ et $6 = \dfrac{18}{3}$ d'où $4 < 5 < \dfrac{16}{3} < 6$. La fonction f étant décroissante sur $[4\,;\,6]$ alors $f(5) \geqslant f\left(\dfrac{16}{3}\right)$.

La phrase est fausse.

(d) $f(x) \geqslant -4$ pour tout $x \in [-3\,;\,7]$ ne suffit pas à affirmer que -4 est le minimum de f : il est possible que -4 n'admette pas d'antécédent par f. Voir annexe pour la proposition d'un contre-exemple

La phrase est fausse.

(e) Comme 5 est le maximum de f alors $f(x) \leqslant 5$ pour tout $x \in [4\,;\,7]$.
Si $4 \leqslant x \leqslant 6$ alors $f(x) \geqslant f(6)$ puisque la fonction f est décroissante sur $[4\,;\,6]$. Or on sait que 6 est un antécédent de -3 par f donc $f(6) = -3$. On en déduit que $f(x) \geqslant -3$ pour tout $x \in [4\,;\,6]$.
Si $6 \leqslant x \leqslant 7$ alors $f(6) \leqslant f(x)$ puisque f est croissante sur $[6\,;\,7]$. Ainsi, $f(x) \geqslant -3$ pour tout $x \in [6\,;\,7]$ On a finalement justifié que $-3 \leqslant f(x) \leqslant 5$ pour tout $x \in [4\,;\,7]$.

La phrase est vraie.