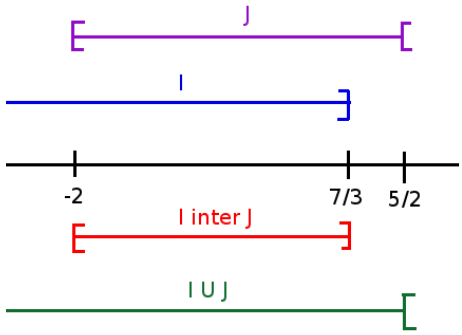
CORRECTION DU DEVOIR A LA MAISON N° 1

SUJET (a)

Exercice 1 :

1. (a) $x \in I$ signifie que $x \leqslant \frac{7}{3}$. $y \in J$ signifie que $-2 \leqslant y < \frac{5}{2}$.

   (b) Comparons les nombres $\frac{7}{3}$ et $\frac{5}{2}$ en les mettant au même dénominateur : $\frac{7}{3} = \frac{14}{6}$ et $\frac{5}{2} = \frac{15}{6}$ donc $\frac{7}{3} < \frac{5}{2}$.



On conclut donc que :

- $I \cap J = \left[-2\,;\,\frac{7}{3}\right]$
- $I \cup J = \left]-\infty\,;\,\frac{5}{2}\right[$

2. (a) $-2 \notin]-\infty\,;\,-2[$ et $-2 \notin]-2\,;\,+\infty[$ donc $-2 \notin]-\infty\,;\,-2[\cup]-2\,;\,+\infty[$. Néanmoins, $-2 \in \mathbb{R}$, donc $]-\infty\,;\,-2[\cup]-2\,;\,+\infty[\neq \mathbb{R}$.
   La phrase est fausse

   (b) Si $x \geqslant 1$ alors x est nécessairement positif d'où $x \in \mathbb{R}^+$.
   La phrase est vraie

   (c) $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0,25$. Or, $0,25 > 0,1$ donc $2^{-2} \notin]0\,;\,0,1[$.
   La phrase est fausse

   (d) L'intervalle $[-10\,;\,10]$ contient des nombres décimaux, comme par exemple $-8,5$ mais $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs, donc il ne contient que des nombres entiers. En particulier, $-8,5 \notin \mathbb{Z}$. Ainsi, $[-10\,;\,10]$ n'est pas inclu dans $\mathbb{Z}$.
   La phrase est faussse

Exercice 2 : *voir annexe pour les justifications sur le graphique*

1. L'ensemble de définition de f est $D_f = [0\,;\,11]$.
2. L'image de 4 par f est -1.
3. Les antécédents de 5 par f sont 6 et 8.
4. $f(2) = 4$
5. Lorsque $3 \leqslant x < 6$, $f(x) \in\leqslant [1\,;\,5[$.
6. Si $f(x) \in [3\,;\,5[$ alors $x \in [1\,;\,3] \cup [5\,;\,6[\cup]8\,;\,9] \cup [x_1\,;\,11]$ avec $x_1 \simeq 10,7$.
7. Le nombre 0 n'a pas d'antécédent par f.

Exercice 3 :

1. (a) La fonction f est définie sur $D_f = \mathbb{R}$.

   (b) $f(-1) = 13 - 2(-1)^2 = 13 - 2 = 11$. L'image de -1 par f est 11.
   $f(\sqrt{7}) = 13 - 2 \times (\sqrt{7})^2 = 13 - 2 \times 7 = -1$. L'image de $\sqrt{7}$ par f est -1.

   (c) Pour déterminer les antécédents de -5 par f, on résout $f(x) = -5$.
   Or $13 - 2x^2 = -5 \iff -2x^2 = -5 - 13 \iff -2x^2 = -18 \iff x^2 = 9 \iff x = 3$ ou $x = -3$.
   Les antécédents de -5 par f sont 3 et -3. vspace0.1cm
   Pour déterminer les antécédents de 15 par f, on résout $f(x) = 15$.
   Or, $f(x) = 15 \iff 13 - 2x^2 = 15 \iff -2x^2 = 15 - 13 \iff -2x^2 = 2 \iff x^2 = -1$. Un carré étant toujours positif, il est impossible que x^2 soit égal à -1. Le nombre 15 n'admet donc pas d'antécédent par f.

2. (a) Comme on ne peut pas diviser par 0, on cherche les valeurs interdites en résolvant $x + 3 = 0$. On obtient $x = -3$ donc l'ensemble de définition de g est $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

   (b) $g\left(-\dfrac{3}{5}\right) = \dfrac{3}{-\frac{3}{5} + 3} = \dfrac{3}{-\frac{3}{5} + \frac{15}{5}} = \dfrac{3}{\frac{12}{5}} = 3 \times \dfrac{5}{12} = \dfrac{5}{4}$.

   $$g(\sqrt{6}) = \frac{3}{\sqrt{6}+3} = \frac{3(\sqrt{6}-3)}{(\sqrt{6}+3)(\sqrt{6}-3)} = \frac{3(\sqrt{6}-3)}{6-9} = \frac{3(\sqrt{6}-3)}{-3} = -(\sqrt{6}-3) = -\sqrt{6}+3.$$

   L'image de $\sqrt{6}$ par g est $-\sqrt{6} + 3$.

   (c) Pour déterminer les antécédents de $\dfrac{1}{2}$ par g, on résout $g(x) = \dfrac{1}{2}$ soit $\dfrac{3}{x+3} = \dfrac{1}{2}$ pour tout $x \neq -3$.

   $$\frac{3}{x+3} = \frac{1}{2} \iff \frac{3}{x+3} - \frac{1}{2} = 0 \iff \frac{6}{2(x+3)} - \frac{x+3}{2(x+3)} = 0 \iff \frac{6-(x+3)}{2(x+3)} = 0 \iff \frac{6-x-3}{2(x+3)} = 0$$
   $$\iff \frac{3-x}{2(x+3)} = 0$$

   Un quotient est nul lorsque son numérateur est nul, on aboutit donc à $3 - x = 0$ soit $-x = -3$ ou encore $x = 3$. Le nombre $\dfrac{1}{2}$ a un seul antécédent par g, il s'agit du nombre 3.

Exercice 4 :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{27} - \frac{\sqrt{60}}{15} \times \sqrt{\frac{45}{4}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{9 \times 3} - \frac{\sqrt{4 \times 15}}{15} \times \frac{\sqrt{9 \times 5}}{\sqrt{4}} + \frac{2\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3} - \frac{\cancel{2}\sqrt{5} \times \sqrt{3}}{15} \times \frac{3\sqrt{5}}{\cancel{2}} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ &= 3\sqrt{3} - \frac{\cancel{5} \times \cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{5} \times \cancel{3}} + \frac{2\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{6\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

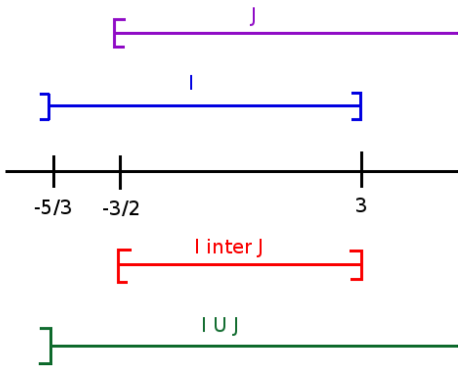
$$B = \frac{0,0063 \times 18^{-2} \times 2^2}{28 \times 10^{-6}} = \frac{63 \times 10^{-4} \times \cancel{4}}{18^2 \times 7 \times \cancel{4} \times 10^{-6}} = \frac{9 \times \cancel{7} \times 10^{-4+6}}{\cancel{7} \times (9 \times 2)^2} = \frac{\cancel{9} \times 10^2}{\cancel{9} \times 9 \times 4} = \frac{100}{36} = \frac{25}{9}$$

SUJET (b)

Exercice 1 :

1. (a) $x \in I$ signifie que $-\dfrac{5}{3} < x \leqslant 3$. $y \in J$ signifie que $y \geqslant -\dfrac{3}{2}$.

   (b) Comparons les nombres $-\dfrac{5}{3}$ et $-\dfrac{3}{2}$ en les mettant au même dénominateur : $-\dfrac{5}{3} = -\dfrac{10}{6}$ et $-\dfrac{3}{2} = -\dfrac{9}{6}$ donc $-\dfrac{5}{3} < -\dfrac{3}{2}$.



On conclut donc que :

- $I \cap J = \left[-\dfrac{3}{2}\,;\,3\right]$
- $I \cup J = \left]-\dfrac{5}{3}\,;\,+\infty\right[$

2. (a) $2^{-2} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4} = 0,25$. Or, $0,25 > 0,2$ donc $2^{-2} \notin]0\,;\,0,2[$.
   La phrase est fausse

   (b) L'intervalle $[-20\,;\,20]$ contient des nombres décimaux, comme par exemple $-17,5$ mais $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs, donc il ne contient que des nombres entiers. En particulier, $-17,5 \notin \mathbb{Z}$. Ainsi, $[-20\,;\,20]$ n'est pas inclu dans $\mathbb{Z}$.
   La phrase est faussse

   (c) Si $x \leqslant -1$ alors x est nécessairement négatif d'où $x \in \mathbb{R}^-$.
   La phrase est vraie

   (d) $-3 \notin]-\infty\,;\,-3[$ et $-3 \notin]-3\,;\,+\infty[$ donc $-2 \notin]-\infty\,;\,-3[\cup]-3\,;\,+\infty[$. Néanmoins, $-3 \in \mathbb{R}$, donc $]-\infty\,;\,-3[\cup]-3\,;\,+\infty[\neq \mathbb{R}$.
   La phrase est fausse

Exercice 2 : *voir annexe pour les justifications sur le graphique*

1. L'ensemble de définition de f est $D_f = [0\,;\,11]$.
2. L'image de 2 par f est 4
3. Les antécédents de 5 par f sont 6 et 8.
4. $f(1) = 3$
5. Lorsque $5 < x \leqslant 8$, $f(x) \in \leqslant]3\,;\,7]$.
6. Si $f(x) \in]3\,;\,5]$ alors $x \in]1\,;\,3[\cup]5\,;\,6] \cup [8\,;\,9[\cup]x_1\,;\,11]$ avec $x_1 \simeq 10,7$.
7. Le nombre 0 n'a pas d'antécédent par f.

Exercice 3 :

1. (a) La fonction f est définie sur $D_f = \mathbb{R}$.

   (b) $f(-1) = 23 - 2(-1)^2 = 23 - 2 = 21$. L'image de -1 par f est 21.
   $f(\sqrt{7}) = 23 - 2 \times (\sqrt{7})^2 = 23 - 2 \times 7 = 9$. L'image de $\sqrt{7}$ par f est 9.

(c) Pour déterminer les antécédents de -9 par f, on résout $f(x) = -9$.
Or $23 - 2x^2 = -9 \Leftrightarrow -2x^2 = -9 - 23 \Leftrightarrow -2x^2 = -32 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 4$ ou $x = -4$.
Les antécédents de -9 par f sont 4 et -4.

Pour déterminer les antécédents de 25 par f, on résout $f(x) = 25$.
Or, $f(x) = 25 \Leftrightarrow 23 - 2x^2 = 25 \Leftrightarrow -2x^2 = 25 - 23 \Leftrightarrow -2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = -1$. Un carré étant toujours positif, il est impossible que x^2 soit égal à -1. Le nombre 25 n'admet donc pas d'antécédent par f.

2. (a) Comme on ne peut pas diviser par 0, on cherche les valeurs interdites en résolvant $x + 4 = 0$. On obtient $x = -4$ donc l'ensemble de définition de g est $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

(b) $g\left(-\frac{8}{5}\right) = \frac{4}{-\frac{8}{5}+4} = \frac{4}{-\frac{8}{5}+\frac{20}{5}} = \frac{4}{\frac{12}{5}} = 4 \times \frac{5}{12} = \frac{5}{3}$.

$$g(\sqrt{14}) = \frac{4}{\sqrt{14}+4} = \frac{4(\sqrt{14}-4)}{(\sqrt{14}+4)(\sqrt{14}-4)} = \frac{4(\sqrt{14}-4)}{14-16} = \frac{4(\sqrt{14}-4)}{-2} = -2(\sqrt{14}-4) = -2\sqrt{14}+8$$

L'image de $\sqrt{14}$ par g est $-2\sqrt{14} + 8$.

(c) Pour déterminer les antécédents de $\frac{1}{2}$ par g, on résout $g(x) = \frac{1}{2}$ soit $\frac{4}{x+4} = \frac{1}{2}$ pour tout $x \neq -4$.

$$\frac{4}{x+4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{4}{x+4} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{2(x+4)} - \frac{x+4}{2(x+4)} = 0 \Leftrightarrow \frac{8-(x+4)}{2(x+4)} = 0 \Leftrightarrow \frac{8-x-4}{2(x+4)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4-x}{2(x+4)} = 0$$

Un quotient est nul lorsque son numérateur est nul, on aboutit donc à $4 - x = 0$ soit $-x = -4$ ou encore $x = 4$. Le nombre $\frac{1}{2}$ a un seul antécédent par g, il s'agit du nombre 4.

Exercice 4 :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{32} - \frac{\sqrt{40}}{15} \times \sqrt{\frac{45}{4}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \sqrt{16 \times 2} - \frac{\sqrt{4 \times 10}}{15} \times \frac{\sqrt{9 \times 5}}{\sqrt{4}} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} - \frac{\cancel{2}\sqrt{2} \times \sqrt{5}}{15} \times \frac{3\sqrt{5}}{\cancel{2}} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ &= 4\sqrt{2} - \frac{\cancel{5} \times \cancel{3}\sqrt{2}}{\cancel{5} \times \cancel{3}} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} - \sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{6\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$B = \frac{0,021 \times 12^{-2} \times 2^2}{28 \times 10^{-5}} = \frac{21 \times 10^{-3} \times \cancel{4}}{12^2 \times 7 \times \cancel{4} \times 10^{-5}} = \frac{3 \times \cancel{7} \times 10^{-3+5}}{\cancel{7} \times (3 \times 4)^2} = \frac{\cancel{3} \times 10^2}{\cancel{3} \times 3 \times 16} = \frac{100}{3 \times 16} = \frac{25 \times \cancel{4}}{12 \times \cancel{4}} = \frac{25}{12}$$