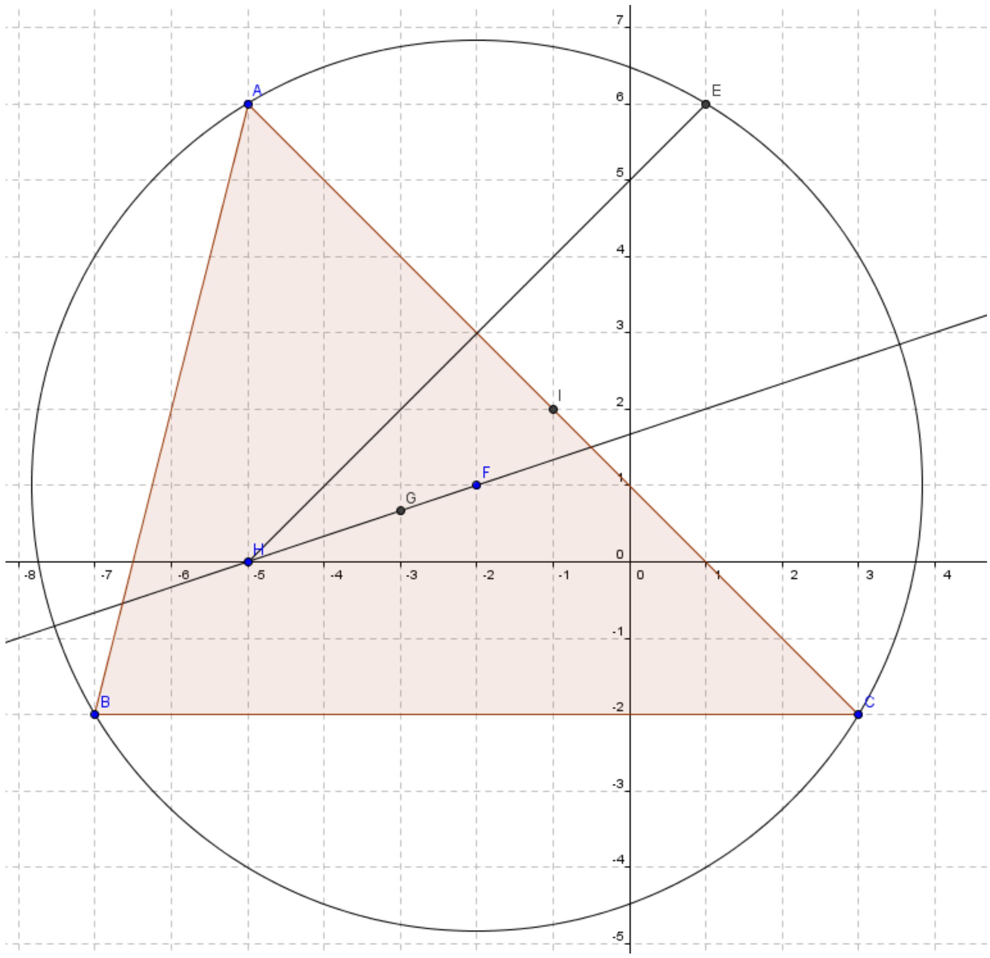
Corrigés d'exercices de bac sur les similitudes indirectes

France métropolitaine, 2007



1. Soit σ la similitude directe de centre A qui transforme C en H.
   Le rapport de cette similitude est $k = \dfrac{\text{AH}}{\text{AC}} = \dfrac{|z_\text{H} - z_\text{A}|}{|z_\text{C} - z_\text{A}|} = \dfrac{|6\text{i}|}{8 - 8\text{i}|} = \dfrac{6}{8\sqrt{2}} = \dfrac{3}{4\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{8}$.
   Un angle de cette similitude est :
   $\left(\overrightarrow{\text{AC}}\ ;\ \overrightarrow{\text{AH}}\right) = \arg\left(\dfrac{z_\text{H} - z_\text{A}}{z_\text{C} - z_\text{A}}\right) = \arg\left(\dfrac{-6\text{i}}{8 - 8\text{i}}\right) = \arg\left(-\dfrac{6}{8} \times \dfrac{\text{i}}{1 - \text{i}}\right) = \arg\left(-\dfrac{3}{8} \times (-1 + \text{i})\right) = \arg\left(\dfrac{3}{8}(1 - \text{i})\right)$
   Or $|1 - i| = \sqrt{2}$ donc $1 - i = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}(\left(\cos(-\dfrac{\pi}{4}) + i\sin(-\dfrac{\pi}{4})\right)$ donc
   $$\arg\left(\frac{3}{8}(1 - \text{i})\right) = \arg\left(1 - \text{i})\right) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi] \text{ et } \left(\overrightarrow{\text{AC}}\ ;\ \overrightarrow{\text{AH}}\right) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}$$
   σ est la similutude directe de centre A, de rapport $\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.
2. (a) s a pour écriture complexe $z' = a\overline{z} + b$.
   A et C sont invariants donc on a le système :
   $\left\{\begin{array}{lcl} z_\text{A} & = & a\overline{z_\text{A}} + b \\ z_\text{C} & = & a\overline{z_\text{C}} + b \end{array}\right.$.
   En soustrayant membre à membre, il vient : $z_\text{A} - z_\text{C} = a\left(\overline{z_\text{A}} - \overline{z_\text{C}}\right)$ donc
   $$a = \frac{z_\text{A} - z_\text{C}}{\overline{z_\text{A} - z_\text{C}}} = \frac{-8 + 8\text{i}}{-8 - 8\text{i}} = \frac{-1 + \text{i}}{-1 - \text{i}} = \frac{-\text{i}(-1 - \text{i})}{-1 - \text{i}} = -\text{i}$$

$b = z_A - a\overline{z_A} = -5+6i+i(-5-6i) = -5+6i-5i+6 = 1+i$
s a pour écriture complexe : $z' = -i\overline{z}+1+i$.

s n'est pas l'identité et est une similitude indirecte ayant deux points invariants : c'est une symétrie axiale, d'axe (AC).

(b) E est le symétrique de H par rapport à la droite (AC), donc E est l'image de H par s.
$z_E = -i\overline{z_H}+1+i = -i(-5)+1+i = 1+6i$. $z_E = 1+6i$.

(c) Le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC est

$$FA = |z_A - z_F| = |-5+6i+2-i| = |-3+5i| = \sqrt{34}$$

$FE = |z_E - z_F| = |1+6i+2-i| = |3+5i| = \sqrt{34}$.
FE=FA donc E appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.
(*Remarque : H est en fait l'orthocentre du triangle ABC et on a vérifié une propriété générale dans un triangle disant que le symétrique de l'orthocentre d'un triangle par rapport à un côté de ce triangle appartient au cercle circonscrit*)

3. I est le milieu de [AC]. L'affixe de I est $z_I = \dfrac{z_A+z_C}{2} = \dfrac{-5+6i+3-2i}{2} = \dfrac{-2+4i}{2} = -1+2i$.
$z_I = -1+2i$.
G est l'image de I par l'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{2}{3}$. (par conséquent, G est le centre de gravité du triangle, puisque l'on sait que celui-ci est aux deux tiers de chaque médiane en partant du sommet).
Cette homothétie a pour écriture complexe $z' - z_B = \dfrac{2}{3}(z - z_B)$ donc $z = \dfrac{2}{3}(z+7+2i) - 7 - 2i$.
Avec $z = z_I$, on obtient $z_G = \dfrac{2}{3}(-1+2i+7+2i)-7-2i = \dfrac{2}{3}(6+4i)-7-2i = 4+\dfrac{8}{3}i-7-2i = -3+\dfrac{2}{3}i$.
$z_G = -3+\dfrac{2}{3}i$.
Le vecteur $\overrightarrow{HG}$ a pour affixe $z_G - z_H = -3+\dfrac{2}{3}i+5 = 2+\dfrac{2}{3}i$.
Le vecteur $\overrightarrow{HF}$ a pour affixe $z_F - z_H = -2+i+5 = 3+i = \dfrac{3}{2}\left(2+\dfrac{2}{3}i\right) = \dfrac{3}{2}z_{\overrightarrow{HG}}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{HF}$ sont donc colinéaires : les points H, G et F sont donc colinéaires.
(remarque : on a remontré dans un cas particulier que dans un triangle non équilatéral, le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité et l'othocentre d'un triangle sont alignés sur une droite appelée droite d'Euler.)

Amerique du sud, novembre 2007

1. L'écriture complexe d'une symétrie axiale (antidéplacement) est de la forme $z' = a\overline{z}+b$. A et B invariants par cette symétrie se traduit par :

$$\begin{cases} 1 &= a\times 1+b \\ i &= a\times(-i)+b \end{cases} \iff \begin{cases} 1 &= a+b \\ i &= -a(i)+b \end{cases} \iff \begin{cases} 1 &= a+b \\ 1-i &= a(1+i) \end{cases} \iff$$

$$\text{(par différence)} \begin{cases} \dfrac{1-i}{1+i} &= a \\ 1 &= a+b \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{-2i}{2} &= a \\ 1 &= a+b \end{cases} \iff \begin{cases} -i &= a \\ 1+i &= b \end{cases}$$

L'écriture complexe est donc : $z' = -i\overline{z}+1+i$.

2. Le point $M' = H(M)$ est défini par $\overrightarrow{AM'} = -2\overrightarrow{AM}$ ce qui correspond pour l'écriture complexe a : $z' - 1 = -2(z-1)$.

3. $f = H\circ S$.
   (a) La réflexion S est une similitude de centre A ; donc la composée de deux similitudes de même centre est une similitude de même centre A.
   (b) Écriture complexe :

– pour S, on a vu que l'écriture complexe est : $z' = -\mathrm{i}\overline{z} + 1 + \mathrm{i}$.
– pour H : $z'' - 1 = -2(z' - 1) \;\Leftrightarrow\; z" = 1 - 2(z' - 1) = -2z' + 3$
– donc $z" = -2\left(-\mathrm{i}\overline{z} + 1 + \mathrm{i}\right) + 3 = 2\mathrm{i}\overline{z} + 1 - 2\mathrm{i}$.

4. (a) Soit $M(z)$ tel que

$$\overrightarrow{AM''} = -2\overrightarrow{AM} \iff z'' - 1 = -2(z-1) \iff 2\mathrm{i}\overline{z}+1-2\mathrm{i}-1 = -2z+2 \iff 2\mathrm{i}\overline{z}+2z = 1+2\mathrm{i}. \ (1)$$

En posant $z = x + \mathrm{i}y$, $2\mathrm{i}(x - \mathrm{i}y) + 2(x + \mathrm{i}y) = 1 + 2\mathrm{i}(1) \Rightarrow \begin{cases} 2y + 2x &= 2 \\ 2x + 2y &= 2 \end{cases}$

Les points $M(x\ ;\ y)$ qui vérifient la relation sont tels que $x + y = 1$ qui est l'équation de la droite (AB) (il suffit pour le justifier de vérifier que les coordonnées de A et B vérifient bien l'équation de cette droite).

Inversement un point M de la droite (AB) a pour image par S le même point M et ensuite on a bien par la transformation h, $\overrightarrow{AM''} = -2\overrightarrow{AM}$.

L'ensemble cherché est donc toute la droite (AB).

(b) De même $\overrightarrow{AM''} = 2\overrightarrow{AM} \iff z'' - 1 = 2(z - 1) \iff 2\mathrm{i}\overline{z} + 1 - 2\mathrm{i} = 2z - 2 \iff 2\mathrm{i}\overline{z} - 2z = -3 + 2\mathrm{i}$ (2).

Si $M(x\ ;\ y)$, alors (2) $\Rightarrow \begin{cases} 2y - 2x &= -2 \\ 2x - 2y &= 2 \end{cases}$

Les points $M(x\ ;\ y)$ sont tels que $x - y = 1$ qui est l'équation d'une droite perpendiculaire à (AB) (coefficient directeur 1, alors que celui de (AB) est -1), et qui contient le point A (le couple $(1\ ;\ 0)$ vérifie l'équation).

Inversement un point M de la perpendiculaire trouvée a pour coordonnées $(x\ ;\ x - 1)$.

On vérifie que $z'' - 1 = 2\mathrm{i}x + 2x - 2 - 2\mathrm{i}$ et que $2(z - 1) = 2\mathrm{i}x + 2x - 2 - 2\mathrm{i}$.

L'ensemble cherché est donc toute la perpendiculaire à (AB) contenant A.

Liban, juin 2006

On a corrigé en classe la partie A et les questions 1 et 2 a) de la partie B

2. b) Soit M' l'image de M par h. Alors

$$z' = \frac{1}{2}(z - z_K) + z_K = \frac{1}{2}(z + 2 - 4i) - 2 + 4i = \frac{1}{2}z + 1 - 2i - 2 + 4i = \frac{1}{2}z - 1 + 2i$$

Soit M'' l'image de M' par f. Alors

$$z'' = -2i\overline{z'} + 6 = -2i\overline{\left(\frac{1}{2}z - 1 + 2i\right)} + 6 = -2i\left(\frac{1}{2}\overline{z} - 1 - 2i\right) + 6 = -i\overline{z} + 2i - 4 + 6 = -i\overline{z} + 2 + 2i$$

On retrouve l'écriture complexe donnée dans l'énoncé.

2. c) Un point de l'axe $(O\,;\,\vec{v})$ a une affixe du type $z = yi$ avec $y \in \mathbb{R}$. Il s'agit de l'affixe d'un point invariant de g si et seulement si :

$$z'' = z \;\Leftrightarrow\; iy = -i\overline{iy} + 2 + 2i \;\Leftrightarrow\; iy = -i(-iy) + 2 + 2i \;\Leftrightarrow\; iy = -y + 2 + 2i \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} -2 + y = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

On trouve ainsi un unique point de l'axe $(O\,,\,\vec{v})$ invariant par g, il s'agit du point L d'affixe $z_L = 2i$.
On a justifié que g est une similitude qui admet deux points fixes distincts : K et L. C'est donc soit l'identité, soit une symétrie. D'après son écriture complexe, ce n'est pas l'identité, donc g est la symétrie d'axe (KL) (les points invariants se trouvent sur l'axe de la symétrie).

2. d) Comme $g = f \circ h$, alors $g \circ h^{-1} = f \circ h \circ h^{-1} = f$. Si on pose $h' = h^{-1}$, alors h' est une homothétie de rapport inverse à celui de h c'est-à-dire de rapport 2 et de même centre que h, c'est-à-dire K. Ainsi, f est la composée de l'homothétie h' suivie de la symétrie g d'axe (KL).

3. Comme f est une similitude, $f(\Delta)$ est une droite. L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle. En effet, si $h'(M) = M'$ et $h'(N) = N'$. Alors $(\overrightarrow{MN}\,;\,\overrightarrow{M'N'})$ correspond à l'angle de la similitude h', c'est-à-dire 0 puisque le rapport de h' (qui vaut 2) est un nombre positif. Cela signifie que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{M'N'}$ sont colinéaires donc les droites (MN) et $(M'N')$ sont parallèles. Ainsi, $h'(\Delta)$ est une droite parallèle à Δ. Or, $f(\Delta) = (g \circ h')(\Delta) = g\left(h'(\Delta)\right)$. L'image par la symétrie axiale g de $h'(\Delta)$ est une droite. Elle sera parallèle à $h'(\Delta)$ et donc à Δ si et seulement si l'axe de la symétrie, ici (KL) est parallèle à Δ.

La Réunion, juin 2008

1. (a) L'écriture complexe de s_1 est $z' = a\overline{z} + b$ avec $a \in \mathbb{R}, a \neq 0,\ b \in \mathbb{R}$.

   Les deux points A et B sont invariants par s_1 ce qui se traduit par : $\left\{\begin{array}{rcl} 2+\text{i} & = & a(2-\text{i})+b \\ 5+2\text{i} & = & a(5-2\text{i})+b \end{array}\right.$

   d'où (par différence)

   $$3+\text{i} = a(3-\text{i}) \iff a = \frac{3+\text{i}}{3-\text{i}} \iff a = \frac{(3+\text{i})^2}{(3+\text{i})(3-\text{i})} = \frac{8+6\text{i}}{10} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}\text{i}$$

   En reportant dans la première équation :

   $$b = 2+\text{i} - (2-\text{i})\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\text{i}\right) = 2+\text{i} - \frac{8}{5} - \frac{3}{5} - \frac{6}{5}\text{i} + \frac{4}{5}\text{i} = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\text{i}$$

   (b) On a $z_{\text{C}'} = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\text{i}\right) \times (-\text{i}) + -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\text{i} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}\text{i}.$

   (c) Soit $M(x\ ;\ y)$ un point du plan avec $x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$. On a $z = x + \text{i}y$ et $z' = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\text{i}\right)(x - \text{i}y) - \frac{1}{5} + \frac{3}{5}\text{i}$. Ce nombre est imaginaire pur si sa partie réelle est nulle soit $\frac{4}{5}x - \frac{1}{5} + \frac{3}{5}y = 0 \iff 4x - 1 + 3y = 0 \iff 4x + 3y = 1.$

   L'ensemble des points M tels que z' est imaginaire pur est donc la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $4x + 3y = 1$.

   (d) $\text{C}'\left(\frac{2}{5}\ ;\ -\frac{1}{5}\right) \in \mathcal{D} \iff 4 \times \left(\frac{2}{5}\right) + 3 \times \left(-\frac{1}{5}\right) = 1 \iff \frac{8-3}{5} = 1$ qui est vraie.

   Le point C′ appartient donc à la droite $(\mathcal{D})$.

2. (a) Équation cartésienne de la droite (AB) : $M(x\ ;\ y) \in (\text{AB}) \iff y = \alpha x + \beta$; en particulier : $\left\{\begin{array}{rcl} 1 & = & 2\alpha + \beta \\ 2 & = & 5\alpha + \beta \end{array}\right. \Rightarrow 1 = 3\alpha \iff \alpha = \frac{1}{3}$; d'où $\beta = 1 - 2\alpha = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

   $M(x\ ;\ y) \in (\text{AB}) \iff y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$.$M(x\ ;\ y) \in (\mathcal{D}) \iff 4x + 3y = 1.$

   Donc un point Ω est commun aux deux droites si et seulement si

   $$4x + 3\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right) = 1 \iff 4x + x + 1 = 1 \iff 5x = 0 \iff x = 0$$

   d'où $y = \frac{1}{3}$. L'affixe de Ω est donc $\omega = \frac{1}{3}\text{i}$.

   (b) Les symétries axiales s_1 et s_2 sont des antidéplacements (similitudes indirectes de rapport -1). Leur composée est une similitude directe dont le rapport est le produit des raports des deux similitudes, donc égal à 1. C'est donc un déplacement

   (c) L'image de C par s_1 est C′ et comme on vient de démontrer que C′ appartient donc à la droite $(\mathcal{D})$ il est invariant par s_2.

   Conclusion : $f(\text{C}) = \text{C}'$.

   Ω appartient à (AB), donc $s_1(\Omega) = \Omega$, mais Ω appartient aussi à $\mathcal{D}$, donc $s_2(\Omega) = \Omega$.

   Conclusion $f(\Omega) = \Omega$.

   (d) f est une similitude directe de rapport 1. Ce n'est ni l'identité, ni une translation c'est donc une rotation de centre Ω puisque ce point est invariant par f.

3. (a) Le couple $(1\ ;\ -1)$ est solution évidente de l'équation $(4 \times 1 + 3 \times (-1) = 1 \quad (1))$.
Si $(x\ ;\ y)$ est une solution de l'équation on a $4x + 3y = 1 \quad (2)$; on a donc par différence (2) - (1) $4(x-1) + 3(y+1) = 0 \iff 4(x-1) = -3(y+1) \quad (3)$.
4 divise donc $-3(y+1)$, mais comme il est premier avec -3 il divise $y+1$ d'après le théorème de Gauss. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y + 1 = 4k \iff y = -1 + 4k$.
En remplaçant dans (3), $4(x-1) = -3 \times 4k \iff x - 1 = -3k \iff x = 1 - 3k$.
Les solutions de l'équation $4x + 3y = 1$ sont tous les couples de la forme $(1 - 3k\ ;\ -1 + 4k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Inversement $4(1-3k) + 3(-1-4k) = 4 - 12k - 3 - 12k = 1$ montre qu'un couple de la forme $(1 - 3k\ ;\ -1 + 4k)$ est solution de l'équation proposée.

(b) Les points de $(\mathcal{D})$ à coordonnées entières sont donc les points de coordonnées $(1 - 3k\ ;\ -1 + 4k), k \in \mathbb{Z}$. Les points M situé à moins de 9 de O sont tels que

$$\begin{aligned} OM < 9 &\iff \mathrm{O}M^2 < 81 \iff x^2 + y^2 < 81 \iff (1-3k)^2 + (-1+4k)^2 < 81 \\ &\iff 1 + 9k^2 - 6k + 1 + 16k^2 - 8k < 81 \iff 25k^2 - 14k - 79 < 0 \\ &\iff k^2 - \frac{14}{25}k - \frac{79}{25} < 0 \iff \left(k - \frac{7}{25}\right)^2 - \frac{49}{625} - \frac{79}{25} < 0 \iff \left(k - \frac{7}{25}\right)^2 - \frac{2024}{625} < 0 \\ &\iff \left(k - \frac{7}{25} + \frac{\sqrt{2024}}{25}\right)\left(k - \frac{7}{25} - \frac{\sqrt{2024}}{25}\right) < 0 \end{aligned}$$

Le trinôme est positif sauf entre les racines $\dfrac{7}{25} - \dfrac{\sqrt{2024}}{25} \approx -1,51$ et $\dfrac{7}{25} + \dfrac{\sqrt{2024}}{25} \approx 2,07$.
Les entiers k solutions sont donc : $-1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2$. Les quatre points de $(\mathcal{D})$ à coordonnées entières dont la distance au point O est inférieure à 9 sont $\mathrm{E}(4\ ;\ -5)$, $\mathrm{F}(1\ ;\ -1)$, $\mathrm{G}(-2\ ;\ 3)$, $\mathrm{H}(-5\ ;\ 7)$

Antilles-Guyane, septembre 2006

1. (a) D'après le cours il existe une unique similitude directe qui transforme deux points distincts en deux points distincts.

(b) On sait que l'écriture complexe de s est : $z' = az + b$, a et b étant deux complexes que l'on détermine en écrivant que $s(\mathrm{O}) = \mathrm{I}$ et $s(\mathrm{A}) = \mathrm{C}$, soit :
$\begin{cases} 1 + \mathrm{i} &= a \times 0 + b \\ 2\mathrm{i} &= a + b \end{cases} \Rightarrow a = \mathrm{i} - 1$ (par différence), et $b = 1 + \mathrm{i}$.
L'écriture complexe est donc $z' = (\mathrm{i} - 1)z + 1 + \mathrm{i}$.
Recherche de points fixes : si z a pour image $z = (\mathrm{i} - 1)z + 1 + \mathrm{i}$, alors
$z(2 - \mathrm{i}) = 1 + \mathrm{i} \iff z = \dfrac{1 + \mathrm{i}}{2 - \mathrm{i}} = \dfrac{(1 + \mathrm{i})(2 + \mathrm{i})}{4 + 1} = \dfrac{1 + 3\mathrm{i}}{5}$. La similitude a un seul point fixe Ω d'affixe $\omega = \dfrac{1}{5} + \mathrm{i}\dfrac{3}{5}$.

(c) On a $\mathrm{A}\Omega^2 = |\omega - 1|^2 = \left(\dfrac{-4}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{16 + 9}{25} = 1 \Rightarrow \mathrm{A}\Omega = 1$.
Conclusion $\mathrm{A}\Omega = \mathrm{AO} = 1$, donc Ω appartient au cercle Γ de centre A et de rayon 1.

2. $f : z \longmapsto z' = \dfrac{-3 - 4\mathrm{i}}{5}\overline{z} + \dfrac{8 + 4\mathrm{i}}{5}$.

(a) $z_{\mathrm{A}'}$ désignant l'affixe de l'image par f de A, $z_{\mathrm{A}'} = \dfrac{-3 - 4\mathrm{i} + 8 + 4\mathrm{i}}{5} = \dfrac{5}{5} = 1 = z_{\mathrm{A}}$.
A est un point invariant par f.
De même $z_{\mathrm{C}'} = \dfrac{-3 - 4\mathrm{i}}{5} \times (-2\mathrm{i}) + \dfrac{8 + 4\mathrm{i}}{5} = \dfrac{6\mathrm{i} - 8 + 8 + 4\mathrm{i}}{5} = \dfrac{10\mathrm{i}}{5} = 2\mathrm{i} = z_{\mathrm{C}}$.
C est également un point invariant par f.
D'après l'écriture complexe $\left(\left|\dfrac{-3 - 4\mathrm{i}}{5}\right| = 1\right)$, f est une similitude indirecte ayant deux points fixes : c'est donc une symétrie-droite autour de la droite (AC).
Image de Ω par f :
$z_{\Omega'} = \left(\dfrac{-3 - 4\mathrm{i}}{5}\right)\left(\dfrac{1 - 3\mathrm{i}}{5}\right) + \dfrac{8 + 4\mathrm{i}}{5} = \dfrac{-3 + 9\mathrm{i} - 4\mathrm{i} - 12 + 40 + 20\mathrm{i}}{25} = \dfrac{25 + 25\mathrm{i}}{25} = 1 + \mathrm{i} = z_{\mathrm{I}}$.
I est donc l'image de Ω par f.

(b) cf. figure en annexe

3. À tout point M on associe M′ et M″ tels que $\overrightarrow{M'M''} = \overrightarrow{\Omega M}$.

   (a) Si M = Ω, alors $\overrightarrow{\Omega'\Omega''} = \overrightarrow{\Omega\Omega} = \vec{0} \Rightarrow \Omega' = \Omega'' = \Omega$ (car Ω est invariant par s).

   (b) Construction de A″ : on a par définition $\overrightarrow{A'A''} = \overrightarrow{\Omega A} \iff \overrightarrow{CA''} = \overrightarrow{\Omega A} \iff$ ΩAA″C est un parallélogramme.

   On peut construire A″ en utilisant les diagonales du parallélogramme ou les côtés opposés de même longueur.

   (c) L'égalité $\overrightarrow{M'M''} = \overrightarrow{\Omega M}$ se traduit en termes d'affixes par
   $z'' - z' = z - z_\Omega \iff z'' = (\mathrm{i}-1)z + 1 + \mathrm{i} + z - \dfrac{1+3\mathrm{i}}{5} = \mathrm{i}z + \dfrac{4+2\mathrm{i}}{5}$.
   Recherche de points invariants : on résout

$$z = \mathrm{i}z + \frac{4+2\mathrm{i}}{5} \iff z(1-\mathrm{i}) = \frac{4+2\mathrm{i}}{5} \iff z = \frac{(4+2\mathrm{i})((1+\mathrm{i})}{5(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \frac{1+3\mathrm{i}}{5} = z_\Omega$$

   On obtient par différence : $z" - \dfrac{1+3\mathrm{i}}{5} = \mathrm{i}\left(z - \dfrac{1+3\mathrm{i}}{5}\right)$ qui est l'écriture complexe d'une rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$ (quart de tour direct).

   (d) L'ensemble (Γ″) est l'image par cette rotation du cercle (Γ) : c'est donc un cercle de même rayon et dont le centre est l'image par le quart de tour du point A, ce point image correspondant à A''.