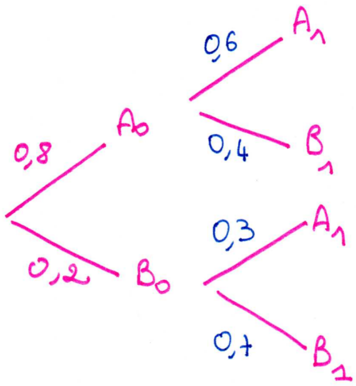
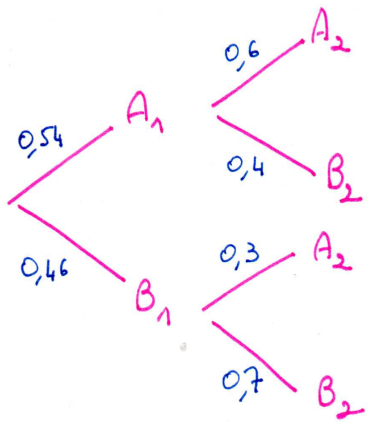
CORRECTION DES EXERCICES POUR LE VENDREDI 27 MARS

Activité 2 sur les suites de matrices : Les parts de marché correspondent aux probabilités, pour un client choisi de manière aléatoire, d'être chez l'un ou l'autre des opérateurs. On note, pour tout entier naturel n, A_n l'évènement "le client est chez Allotel" en $(2010+n)$" et B_n l'évènement "le client est chez BravoTel en $(2010+n)$". On peut donc considérer que $a_n = P(A_n)$.





1. (a)

D'après l'énoncé $p_{A_0}(A_1) = 0,6$ et $p_{A_0}(B_1) = 0,4$. De plus, $p_{B_0}(A_1) = 0,3$ et $p_{B_0}(B_1) = 0,7$.

$\{A_0\,;\,B_0\}$ forme une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} a_1 &= p(A_1) = p_{A_0}(A_1) \times p(A_0) + p_{B_0}(A_1) \times p(B_0) = 0,6 \times a_0 + 0,3 \times b_0 = 0,6 \times 0,8 + 0,3 \times 0,2 \\ &= 0,48 + 0,06 = 0,54 \end{aligned}$$

On en déduit que $b_1 = p(B_1) = 1 - p(A_1) = 1 - 0,54 = 0,46$.

Pour détrerminer a_2, on fait un raisonnement analogue avec $\{A_1\,;\,B_1\}$ comme partition de l'univers.

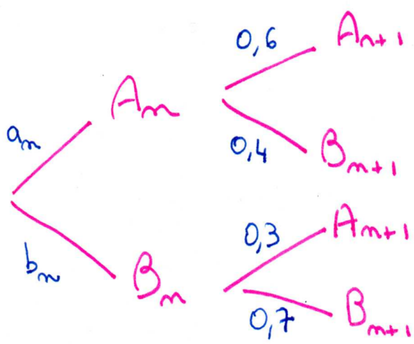
On a encore : $p_{A_1}(A_2) = 0,6$, $p_{A_1}(B_2) = 0,4$, $p_{B_1}(A_2) = 0,3$ et $p_{B_1}(B_2) = 0,7$.

$$\begin{aligned} a_2 &= p(A_2) = p_{A_1}(A_2) \times p(A_1) + p_{B_1}(A_2) \times p(B_1) = 0,6 \times a_1 + 0,3 \times b_1 = 0,6 \times 0,54 + 0,3 \times 0,46 \\ &= 0,462 \end{aligned}$$

On déduit que $b_2 = p(A_2) = 1 - p(A_1) = 1 - 0,462 = 0,538$

(b) On considère la partition de l'univers $\{A_n\,;\,B_n\}$.

On sait que : $p_{A_n}(A_{n+1}) = 0,6$, $p_{A_n}(B_{n+1}) = 0,4$, $p_{B_n}(A_{n+1}) = 0,3$ et $p_{B_n}(B_{n+1}) = 0,7$. D'après la formule des probabilités totales :



$$\begin{aligned} a_{n+1} &= p(A_{n+1}) \\ &= p_{A_n}(A_{n+1}) \times p(A_n) + p_{B_n}(A_{n+1}) \times p(B_n) \\ &= 0,6 \times a_n + 0,3 \times b_n \\ b_{n+1} &= p(B_{n+1}) \\ &= p_{A_n}(B_{n+1}) \times p(A_n) + p_{B_n}(B_{n+1}) \times p(B_n) \\ &= 0,4 \times a_n + 0,7 \times b_n \end{aligned}$$

(c) On utilise la calculatrice et on donne des valeurs approchées à 10^{-5}.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	0,8	0,54	0,462	0,4386	0,43158	$\simeq 0,42947$	$\simeq 0,42884$	$\simeq 0,42865$	$\simeq 0,42860$
b_n	0,2	0,46	0,538	0,5614	0,56845	$\simeq 0,57053$	$\simeq 0,57116$	$\simeq 0,57135$	$\simeq 0,57140$

n	9	10	11	12
a_n	$\simeq 0,42858$	$\simeq 0,42857$	$\simeq 0,42857$	$\simeq 0,42857$
b_n	$\simeq 0,57142$	$\simeq 0,57143$	$\simeq 0,57143$	$\simeq 0,57143$

2. (a) Comme $B_n = \overline{A_n}$, alors $b_n = P(B_n) = 1 - P(A_n) = 1 - a_n$ d'où $a_n + b_n = 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 0,6\,a_n + 0,3\,b_n = 0,6\,a_n + 0,3\,(1 - a_n) = 0,6\,a_n + 0,3 - 0,3\,a_n = 0,3\,a_n + 0,3$ et $b_{n+1} = 0,4a_n + 0,7b_n = 0,4\,(1 - b_n) + 0,7\,b_n = 0,4 - 0,4b_n + 0,7b_n = 0,4 + 0,3b_n$.

Or, $DP_n + E = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 \\ 0 & 0,3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3\,a_n \\ 0,3\,b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3\,a_n + 0,3 \\ 0,3\,b_n + 0,4 \end{pmatrix}$

donc $DP_n + E = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = P_{n+1}$

(b)

$$C = DC + E \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 \\ 0 & 0,3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,4 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 0,3a + 0,3 \\ b = 0,3b + 0,4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a - 0,3a = 0,3 \\ b - 0,3b = 0,4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0,7a = 0,3 \\ 0,7b = 0,4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = \dfrac{0,3}{0,7} = \dfrac{3}{7} \\[2ex] b = \dfrac{0,4}{0,7} = \dfrac{4}{7} \end{cases}$$

On conclut que $C = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{7} \\[2ex] \dfrac{4}{7} \end{pmatrix}$

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = P_{n+1} - C = DP_n + E - (DC + E)$ car $C = DC + E$.

Ainsi, $U_{n+1} = DP_n + E - DC - E = D(P_n - C) = D\,U_n$

(b) On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, la propriété Q_n : "$U_n = D^n\,U_0$.

— *Initialisation* pour $n = 0$, $D^0 = I_2$ donc $D^0\,U_0 = I_2\,U_0 = U_0$. Ainsi la propriété Q_0 est vraie.

— *Etape d'hérédité* on fixe $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que la propriété Q_n est vraie, c'est-à-dire que $U_n = D^n\,U_0$. Montrons que Q_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que $U_{n+1} = D^{n+1}\,U_0$.
$U_{n+1} = DU_n$ d'après la question a) et $U_n = D^n\,U_0$ d'après Q_n.
Par conséquent, $U_{n+1} = D \times D^n\,U_0 = D^{n+1}\,U_0$. Finalement, Q_{n+1} est vraie.

— *Conclusion* D'après le principe de récurrence, $U_n = D^n\,U_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme $U_n = P_n - C$ alors $P_n = U_n + C = D^nU_0 + C$ et

$$U_0 = P_0 - C = \begin{pmatrix} a_0 - a \\ b_0 - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 - \dfrac{3}{7} \\[2ex] 0,2 - \dfrac{4}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{5} - \dfrac{3}{7} \\[2ex] \dfrac{1}{5} - \dfrac{4}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{28 - 15}{35} \\[2ex] \dfrac{7 - 20}{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{13}{35} \\[2ex] -\dfrac{13}{35} \end{pmatrix}$$

Comme $D = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 \\ 0 & 0,3 \end{pmatrix}$ est diagonale donc $D^n = \begin{pmatrix} (0,3)^n & 0 \\ 0 & (0,3)^n \end{pmatrix}$ puis

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = P_n = \begin{pmatrix} (0,3)^n & 0 \\ 0 & (0,3)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dfrac{13}{35} \\[2ex] -\dfrac{13}{35} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{3}{7} \\[2ex] \dfrac{4}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,3)^n \times \dfrac{13}{35} \\[2ex] (0,3)^n \times \left(-\dfrac{13}{35}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{3}{7} \\[2ex] \dfrac{4}{7} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (0,3)^n \times \dfrac{13}{35} + \dfrac{3}{7} \\[2ex] (0,3)^n \times \left(-\dfrac{13}{35}\right) + \dfrac{4}{7} \end{pmatrix}$$

Onen déduit que $a_n = (0,3)^n \times \dfrac{13}{35} + \dfrac{3}{7}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) On sait que $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} q^n = 0$ si $-1 < q < 1$ donc $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} 0,3^n = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} 0,3^n \times \dfrac{13}{35} = 0$ par produit puis $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} 0,3^n \times \dfrac{13}{35} + \dfrac{3}{7} = \dfrac{3}{7}$ par somme.

De même, $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} 0,3^n \times \left(-\dfrac{13}{35}\right) + \dfrac{4}{7} = \dfrac{4}{7}$ par produit puis somme.

La suite de matrices (P_n) converge vers $P = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{7} \\ \dfrac{4}{7} \end{pmatrix}$.

Au bout d'un grand nombre d'années, 3 personnes sur 7 seront chez AlloTel et 4 personnes sur 7 vers BravoTel.

Exercice 20 p.62 : Comme $PGCD(n\,;315) = 35$ alors 35 est un diviseur de n. Ainsi, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 35k$. Or, $0 \leqslant n < 315$ d'où $0 \leqslant 35k < 315$. Ainsi, $0 \leqslant k < \dfrac{315}{35}$ c'est-à-dire $0 \leqslant k < 9$. On sait de plus que $315 = 35 \times 9 = 35 \times 3^2$

- Si $k = 0$, alors $n = 0$ et tous les nombres (à part 0) divisent 0 donc $PGCD(0\,;315) = 315$. On exclut donc cette éventualité.
- Si $k = 1$, alors $n = 35$. Comme 35 est un diviseur de 315 et que c'est le plus grand diviseur de 35 alors $PGCD(35, 315) = 35$. Cette valeur de n convient.
- Si $k = 2$, alors $n = 70 = 2 \times 35$. Les seuls diviseurs de 70 plus grands que 35 sont 35 et 70. Or, 70 ne divise par $315 = 3^2 \times 5 \times 7$ puisqu'il ne comporte pas de 2 dans sa décomposition en produits de facteurs premiers. Ainsi, $PGCD(70\,, 315) = 35$. Cette valeur de n convient.
- Si $k = 3$, alors $n = 35 \times 3 = 105$. Or, $315 = 105 \times 3$, donc 105 est un diviseur commun à n et à 315 et il est plus grand que 35. On en déduit que $PGCD(n\,;315) \neq 35$. On exclut donc cette éventualité.
- Si $k = 4$, alors $n = 4 \times 35 = 140$. Les diviseurs de 140 plus grands que 35 sont donc 35, $35 \times 2 = 70$ et $35 \times 4 = 140$. Comme 2 n'apparait pas dans la décompostion en produit de facteurs premiers de 315, ni 70, ni 140 ne divisent 315. On en déduit que $PGCD(140\,;315) = 35$. Cette valeur de n convient.
- Si $k = 5$, alors $n = 35 \times 5 = 175$. Les diviseurs de 315 supérieurs à 35 sont 35 et 175. Or, $175 = 5^2 \times 7$ n'est pas un diviseur de 315 puisque 5 n'apparait pas avec une puissance de 2 dans la décomposition en produit de facteurs premiers de 315. Ainsi, $PGCD(175, 315) = 35$. Cette valeur de n convient.
- Si $k = 6$, alors $n = 6 \times 35 = 210 = 105 \times 2$. On a déjà remarqué que 105 est aussi un diviseur de 315. Ainsi, 105 est un diviseur commun à 210 et 315 plus grand que 35 d'où $PGCD(210\,, 315) \neq 35$. On exclut donc cette éventualité.
- Si $k = 7$, alors $n = 7 \times 35 = 245$. Les seuls diviseurs de 245 supérieurs à 35 sont 35 et 245. Or, $245 = 3 \times 5 \times 7^2$ ne divise pas 315 puisque le 7 n'est pas au carré dans sa décomposition en produit de facteurs premiers. Finalement, $PGCD(245, 315) = 35$. Cette valeur de n convient.
- Si $k = 8$, alors $n = 8 \times 35 = 2^3 \times 35 = 280$ donc les diviseurs de 280 supérieurs à 35 sont 35, $35 \times 2 = 70$, $35 \times 4 = 140$ et $35 \times 8 = 280$. Ni 70, ni 140, ni 280 ne divisent 315 qui ne comporte pas de 2 dans sa décomposition en produit de facteurs premiers. Ainsi, $PGCD(280, 315) = 35$. Cette valeur de n convient.

Les entiers naturels qui répondent au problème posé sont 35, 70, 140, 175, 245, 280.

Exercice 21 p.62 : Comme $252 \equiv 10\ [p]$ alors p est un diviseur de $252 - 10 = 242$. De même, $547 \equiv 8\ [p]$ donc p est un diviseur de $547 - 8 = 539$. Or, $242 = 2 \times 121 = 2 \times 11^2$ et $539 = 7 \times 77 = 7^2 \times 11$.

Les diviseurs positifs de 242 sont au nombre de $(1+1) \times (2+1) = 6$: $D(242) = \{1\,;2\,;11\,;22\,;121\,;242\}$.

Les diviseurs positifs de 539 sont au nombre de $(2+1) \times (1+1) = 6$: $D(539) = \{1\,;7\,;11\,;49\,;77\,;539\}$.

Les diviseurs communs à 242 et 539 sont 1 et 11 donc $p = 1$ ou $p = 11$.

Exercice 10 p.122 :

1. Il s'agit de résoudre $c = \frac{1}{4}c - 3$. Cette équation équivaut à : $c - \frac{1}{4}c = -3 \Leftrightarrow \frac{3}{4}c = -3 \Leftrightarrow c = \frac{-3}{\frac{3}{4}} = -4$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - c = u_n + 4$ puisque $c = -4$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 4 = \frac{1}{4}u_n - 3 + 4 = \frac{1}{4}u_n + 1 = \frac{1}{4}(u_n + 4) = \frac{1}{4}v_n$$

   La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$.

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n$ avec $v_0 = u_0 - c = 2 + 4 = 6$ d'où $v_n = 6\left(\frac{1}{4}\right)^n$. De plus, $u_n = v_n + c = v_n - 4 = 6\left(\frac{1}{4}\right)^n - 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. On sait que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} q^n$ si $-1 < q < 1$. Par conséquent, $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$.

   On en déduit que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} 6\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ par produit puis $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = -4$ par somme.