

CORRECTION DES EXERCICES 7, 8 et 9 (feuille d'exercices) DE GEOMETRIE

Exercice 7 :

a) • Pour déterminer l'intersection de la surface $\mathcal{S}$ d'équation $z = 3x + 7y$ avec le plan (xOy) d'équation $z = 0$, on résout le système $\begin{cases} z = 3x + 7y \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 7y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. Il s'agit de l'intersection de deux plans de l'espace donc d'une droite d'équation paramétrique $\begin{cases} x = -\dfrac{7}{3}y \\ y = y \\ z = 0 \end{cases}$ $, y \in \mathbb{R}$. C'est donc la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{V_1}\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

• Pour déterminer l'intersection de la surface $\mathcal{S}$ d'équation $z = 3x + 7y$ avec le plan (xOz) d'équation $y = 0$, on résout le système $\begin{cases} z = 3x + 7y \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3x \\ y = 0 \end{cases}$. Il s'agit de l'intersection de deux plans de l'espace donc d'une droite d'équation paramétrique $\begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = 3x \end{cases}$ $, x \in \mathbb{R}$. C'est donc la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{V_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

• Pour déterminer l'intersection de la surface $\mathcal{S}$ d'équation $z = 3x + 7y$ avec le plan (yOz) d'équation $x = 0$, on résout le système $\begin{cases} z = 3x + 7y \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 7y \\ x = 0 \end{cases}$. Il s'agit de l'intersection de deux plans de l'espace donc d'une droite d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 0 \\ y = y \\ z = 7y \end{cases}$ $, xy \in \mathbb{R}$. C'est donc la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{V_3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) • Pour déterminer l'intersection de la surface $\mathcal{S}$ d'équation $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ avec le plan (xOy) d'équation $z = 0$, on résout le système :

$$\begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4 - x^2 - y^2} = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

Il s'agit de l'équation du cercle de centre O de rayon 2 inclus dans le plan (xOy).

• Pour déterminer l'intersection de la surface $\mathcal{S}$ d'équation $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ avec le plan (xOz) d'équation $y = 0$, on résout le système :

$$\begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = 4 - x^2 \\ z = 0 \\ z \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + z^2 = 4 \\ y = 0 \\ z \geqslant 0 \end{cases}$$

Il s'agit de l'équation d'un demi-cercle (portion pour laquelle $z \geqslant 0$) de centre O de rayon 2 inclus dans le plan (xOz).

• Pour déterminer l'intersection de la surface $\mathcal{S}$ d'équation $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ avec le plan (yOz) d'équation $x = 0$, on résout le système :

$$\begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{4 - y^2} = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = 4 - y^2 \\ x = 0 \\ z \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x = 0 \\ z \geqslant 0 \end{cases}$$

Il s'agit de l'équation d'un demi-cercle (portion pour laquelle $z \geqslant 0$) de centre O de rayon 2 inclus dans le plan (yOz).

Exercice 8 :

1. L'intersection de $\mathcal{S}$ avec le plan d'équation $y = 2$ est définie par le système

$$\begin{cases} z = x^2 + 4xy \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x^2 + 8x \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = (x+4)^2 - 16 \\ y = 2 \end{cases}$$

La courbe $\mathcal{C}_1$ projetée de cette intersection dans le plan (xOz) a pour équation $z = (x+4)^2 - 16$. Il s'agit d'une parabole de sommet $S(-4\,;\,-16)$, tournée vers le haut (coefficient dominant $a = 1 > 0$) et coupant l'axe des abscisses en $A(0\,;\,-8)$ et $O(0\,;\,0)$. (voir annexe pour la figure)

2. L'intersection de $\mathcal{S}$ avec le plan d'équation $x = 1$ est définie par le système

$$\begin{cases} z = x^2 + 4xy \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 + 4y \\ x = 1 \end{cases}$$

La courbe $\mathcal{C}_2$ projetée de cette intersection dans le plan (yOz) a pour équation $z = 4y + 1$. Il s'agit de la droite de coefficient directeur 4 et passant par $A(0\,;\,1)$ (voir annexe pour la figure)

3. L'intersection de $\mathcal{S}$ avec le plan d'équation $z = 1$ est définie par le système

$$\begin{cases} x^2 + 4xy = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+4y) = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

En posant $X = x$ et $Y = x + 4y$ on retrouve l'équation d'une hyperbole ($XY = 1$). On peut aussi exprimer y en fonction de x : $4xy = 1 - x^2$ donc $y = \dfrac{1}{4x} - \dfrac{x}{4}$ pour tout $x \neq 0$ (on peut supposer $x \neq 0$ car 0 n'est jamais solution de $x(x+4y) = 1$. La courbe $\mathcal{C}_3$ est celle de la fonction homographique $f : x \mapsto \dfrac{1}{4x} - \dfrac{x}{4}$ est celle d'une hyperbole avec pour asymptote verticale $x = 0$ et pour asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$, la droite d'équation $y = -\dfrac{x}{4}$. De plus, f est décroissante sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ comme somme de deux fonction décroissante sur ces intervalles (fonction inverse multipliée par $\dfrac{1}{4}$ et fonction linéaire de coefficient directeur $-\dfrac{1}{4} < 0$). (voir annexe pour la figure)

Exercice 9 :

1. Les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{S}$ avec les plans parallèles à (zOy) d'équation $x = k$ ($k \in \mathbb{R}$) sont les solutions du système

$$\begin{cases} z = 2x^2 + y - xy \\ x = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2k^2 + y - ky \\ x = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = y(1-k) + 2k^2 \\ x = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ y = y \\ z = y(1-k) + 2k^2 \end{cases}, y \in \mathbb{R}$$

On retrouve l'équation paramètrique d'un droite.

2. Les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{S}$ avec les plans parallèles à (xOz) d'équation $y = k$ ($k \in \mathbb{R}$) sont les solutions du système

$$\begin{cases} z = 2x^2 + y - xy \\ y = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x^2 + k - kx \\ y = k \end{cases}$$

Les fonctions $x \mapsto 2x^2 - kx + k$ sont des fonctions polynômes du second degré donc leurs courbe représentatives sont des paraboles.

3. – Les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{S}$ avec les plans parallèles à (xOy) d'équation $z = k$ ($k \in \mathbb{R}$) sont les solutions du système

$$\begin{cases} z = 2x^2 + y - xy \\ z = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + y - xy = k \\ z = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(1-x) = k - 2x^2 \\ z = k \end{cases}$$

– Pour $z = 1$, on obtient la courbe d'équation $y(1-x) = 1 - 2x^2$ incluse dans le plan d'équation $z = 1$. Pour $x = 1$, cela donne : $0 = -1$, ce qui est impossible donc on peut supposer que $x \neq 1$ et l'équation de la courbe est $y = \dfrac{1 - 2x^2}{1 - x}$. C'est le réprésentation dela fonction homographique $f : x \mapsto \dfrac{1 - 2x^2}{1 - x}$

définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$, il s'agit donc de deux branches d'hyperboles.

Pour tout $x \neq 1$, $f(x)=\dfrac{2-2x^2-1}{1-x}=\dfrac{2(1-x)(1+x)}{1-x}-\dfrac{1}{1-x}=2(x+1)-\dfrac{1}{1-x}$. La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $x=1$ et une asymptote oblique d'équation $y=2x+2$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Pour tracer la courbe on peut eventuellement étudier les varitaions de f. Pour cela on dérive la fonction f (rationnelle donc dérivable sur son domaine de définition $\mathbb{R}-\{1\}$).

Pour tout $x \neq 1$, $f'(x)=2+\dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$ avec $u(x)=1-x$ puisque $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$. Ainsi,

$$f'(x)=2-\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{2(1-x)^2-1}{(1-x)^2}=\frac{2(1-2x+x^2)-1}{(1-x)^2}=\frac{2x^2-4x+1}{(1-x)^2}$$

Comme un carré est toujours positif, le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $P(x)=2x^2-4x+1$. Calculons son discriminant : $\Delta=16-8=8>0$. Les racines de P sont $x_1=\dfrac{4-2\sqrt{2}}{4}=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<1$ et $x_2=\dfrac{4+2\sqrt{2}}{4}=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}>1$. Comme le coefficient dominant $a=2$ est positif, alors $P(x)$ est positif à l'extérieur des racines et négatif à l 'intérieur. On en déduit que f est croissante sur $]-\infty\,;1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}]$, décroissante sur $[1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,;1[$ et sur $]1\,;1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}]$ et croissante sur $[1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,;+\infty[$. (voir annexe pour la figure)

- Pour $z=2$, on obtient la courbe d'équation $y(1-x)=2-2x^2$ incluse dans le plan d'équation $z=1$. Or,

$$\begin{aligned} y(1-x)=2-2x^2 &\Leftrightarrow y(1-x)=2(1-x^2) \Leftrightarrow y(1-x)=2(1-x)(1+x)\\ &\Leftrightarrow y(1-x)-2(1-x)(1+x)=0 \Leftrightarrow (1-x)(y-2-2x)=0\\ &\Leftrightarrow x=1 \text{ ou } y=2+2x \end{aligned}$$

On obtient la réunion de deux droites. (voir annexe pour la figure)