CORRECTION DES EXERCICES POUR LE VENDREDI 14 JANVIER

Exercice 35 p.31 :

1. Comme $d = PGCD(a\,;\,b)$ alors d divise $a = 15n + 13$ et $b = 45n + 16$ donc d divise $3a - b$.
Or, $3a - b = 3(15n + 13) - (45n + 16) = 45n + 39 - 45n - 16 = 23$ donc d divise 23. On sait que 23 est un nombre premier ; ses seuls diviseurs sont donc 1 et 23. Par conséquent, $d = 23$ ou $d = 1$.

2. $b = 45n + 16 = 3(15n + 13) - 23 = 3a - 23$ donc $PGCD(a\,;\,b) = PGCD(a\,;\,23)$ d'après le lemme d'Euclide.
Ce nombre vaut 23 si et seulement si 23 divise $a = 15n + 13$. Comme 23 divise $15n + 13$ signifie qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $15n + 13 = 23k$, on cherche à résoudre l'équation diophantienne $23k - 15n = 13$ (E).
Pour déterminer une solution particulière on applique l'algortihme d'Euclide : $23 = 15 + 8$; $15 = 8 + 7$; $8 = 7 + 1$; $7 = 7 \times 1 + 0$ donc le dernier reste non nul dans cette succession de divisions euclidiennes est 1. Ainsi, $PGCD(23\,;\,15) = 1$. De plus,
$$1 = 8 - 7 = 8 - (15 - 8) = 2 \times 8 - 15 = 2 \times (23 - 15) - 15 = 2 \times 23 - 15 \times 3$$
On en déduit que $13 = 2 \times 13 \times 23 - 15 \times 3 \times 13 = 26 \times 23 - 39 \times 15$ donc $(k_0\,;\,n_0) = (26\,;\,39)$ est solution particulière de (E).
$(k\,;\,n)$ est solution de (E) signifie que $23k-15n = 13 = 23k_0-15n_0$, c'est-à-dire que $23(k-k_0) = 15(n-n_0)$.
Comme $k - k_0 \in \mathbb{Z}$, alors 23 divise $15(n - n_0)$. De plus $PGCD(23\,;\,15) = 1$ donc d'après le théorème de Gauss, 23 divise $n - n_0$. Par conséquent, il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $n - n_0 = 23p$ soit $n = n_0 + 23p = 39 + 23p$ d'où $n \equiv 39$ [23]. Comme $39 = 23 + 16$ alors $39 \equiv 16$ [23] donc $n \equiv 16$ [23].
On vient de montrer que si 23 divise a alors $n \equiv 16$ [23].
On s'interesse maintenant à la réciproque : on suppose que $n \equiv 16$ [23]. Alors $15n \equiv 16 \times 15$ [23] soit $15n \equiv 240$ [23] puis $15n + 13 \equiv 253$ [23]. Or, $253 = 23 \times 11$ d'où $253 \equiv 0$ [23] soit $15n + 13 \equiv 0$ [23], ce qui signifie que 23 divise $15n + 13$.
En conclusion, on a justifié que 23 divise a si et seulement si $n \equiv 16$ [23] ou encore que $PGCD(a\,;\,b) = 23$ si et seulement si $n \equiv 16$ [23]. Dans tous les autres cas, $PGCD(a\,;\,b) = 1$.

Exercice 98 p.37 : Soit N la somme d'argent dont dispose Mémé à la fin de chaque mois ; x le nombre de ses petits-enfants et y le nombre de ses arrières-petits-enfants. D'après l'énoncé $N \leqslant 200$; $N = 17x+4$ et $N = 11y+9$. Ainsi, $17x + 4 = 11y + 9$ soit $17x - 11y = 9 - 4 = 5$. On résout l'équation diphantienne (E) : $17x - 11y = 5$.
On cherche une solution particulière en commançant par appliquer l'algorithme d'Euclide. $17 = 11+6$; $11 = 6+5$, $6 = 5 + 1$; $5 = 5 \times 1 + 0$. Le dernier reste non nul dans cette succession de divisions euclidiennes est 1 d'où $PGCD(17\,;\,11) = 1$. De plus,
$$1 = 6 - 5 = 6 - (11 - 6) = 2 \times 6 - 11 = 2 \times (17 - 11) - 11 = 2 \times 17 - 3 \times 11$$
Par conséquent, $5 = 10 \times 17 - 15 \times 11$ donc $(x_0\,;\,y_0) = (10\,;\,15)$ est solution particulière de (E).
$(x\,;\,y)$ est solution de (E) si et seulement si $17x-11y = 5 = 17x_0-11y_0$, c'est-à-dire que $17(x-x_0) = 11(y-y_0)$ (F).
Comme $y - y_0 \in \mathbb{Z}$, 11 divise $17(x - x_0)$. De plus, $PGCD(17\,;\,11) = 1$ alors d'après le théorème de Gauss, 11 divise $x - x_0$. En particulier, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - x_0 = 11k$ soit $x = x_0 + 11k = 10 + 11k$. En remplaçant dans l'équation (F), on obtient : $17 \times 11k = 11(y - y_0)$ soit $y - y_0 = 17k$ d'où $y = y_0 + 17k = 15 + 17k$.
Vérification : pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $17(10+11k)-11(15+17k) = 17\times10+17\times11k-11\times15-11\times17k = 170-165 = 5$ donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{(10 + 11k\,;\,15 + 17k)\,;\,k \in \mathbb{Z}\}$.
On en déduit que $N = 17x + 4 = 17(10 + 11k) + 4 = 170 + 187k + 4 = 174 + 187k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Comme N est une somme d'argent alors $N \geqslant 0$ donc $0 \leqslant 174 + 187k \leqslant 200 \iff -174 \leqslant 187k \leqslant 26 \iff -\dfrac{174}{187} \leqslant k \leqslant \dfrac{26}{187}$. Par conséquent, $-1 < k < 1$ et $k \in \mathbb{Z}$ donc $k = 0$ et $N = 174$. Pour $k = 0$, $x = 10$ et $y = 15$ donc Mémé dispose de 174 euros à la fin de chaque mois, elle possède 10 petits-enfants et 15 arrières-petits-enfants.
On peut vérifier : $10 \times 17 + 4 = 174$ et $15 \times 11 + 9 = 174$.

Exercice C : On suppose que $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ est un nombre premier. Comme a et b sont des entiers naturels alors $a + b \in \mathbb{N}$ et $a - b \in \mathbb{Z}$. Le nombre $a + b$ est un diviseur de $a^2 - b^2$ et comme $a^2 - b^2$ est premier, ses seuls diviseurs positifs sont 1 et lui même donc soit $a + b = 1$, soit $a + b = a^2 - b^2$.

- Si $a+b=1$, comme a et b sont des entiers naturels, soit $a=0$ et $b=1$, soit $a=1$ et $b=0$. Dans les deux cas a et b sont des entiers consécutifs.
- Si $a+b=a^2-b^2$, alors deux cas sont à considérer. Soit $a+b=0$ et donc $a=b=0$ puis $a^2-b^2=0$, ce qui contredit qu'il s'agit d'un nombre premier. Soit $a+b\neq 0$ et $\dfrac{a^2-b^2}{a+b}=a-b=1$ donc $a=b+1$. Les nombres a et b sont alors des entiers consécutifs.

Dans tous les cas, on a montré que a et b sont des entiers consécutifs.

Exercice D :

1. Non on peut même dire que ce n'est jamais le cas car si un nombre est premier et strictement supérieur à 2 c'est un nombre impair (sinon, il serait divisible par 2 donc pas premier). La somme de deux nombres impairs est un nombre pair : en effet, pour tout nombre k et k' dans $\mathbb{N}$, $(2k+1)+(2k'+1)=2(k+k'+1)$ et $k+k'+1\in\mathbb{N}$. Comme la somme de deux nombres strictement supérieurs à deux est également strictement supérieure à 2, alors la somme de deux nombres premiers strictement supérieurs à 2 est un nombre pair strictement supérieur à 2 et admet donc 2 comme diviseur. Il ne peut donc pas s'agir d'un nombre premier.
2. Soit p et q deux nombres premiers distincts. Les seuls diviseurs positifs de p sont 1 et p et les seuls diviseurs positifs de q sont 1 et q. Or, $p\neq q$ donc p et q n'ont qu'un seul diviseur poritif en commun, il s'agit du nombre 1. Finalement, les seuls diviseurs communs de p et q sont 1 et -1.
3. On sait que p divise p et pq (car $q\in\mathbb{N}$) donc si p divise $pq+p+q$ alors p divise $pq+p+q-pq-p=q$. Or, p ne peut pas diviser le nombre premier q (il n'admet que 1 et q comme diviseur positif et $q\neq p$. Par conséquent, p ne peut pas diviser la somme $pq+p+q$. Dans cette question, les nombres p et q jouent un rôle symétrique donc on peut conclure de même que q ne peut pas diviser la somme $pq+p+q$.

Exercice 107 p.38 : On commence par remarquer que le nombre 97 est un nombre premier. En effet, comme $\sqrt{97}<10$, pour justifier que 97 est premier il suffit de vérifier qu'il n'est divisible par aucun nombre premier plus petit que 10. Or, 97 n'est pas divisible par 2 car il est impair ; il n'est pas divisible par 3 car la somme de ses chiffres vaut $9+7=16$ et n'est pas un multiple de 3 ; il n'est pas divisible par 5 car il ne se termine ni par 0 ni par 5 ; il n'est pas divisible par 7 car $\dfrac{97}{7}\simeq 13,9$. Finalement, 97 est bien un nombre premier.

- D'après le corrolaire du petit théorème de Fermat, $50^{97}\equiv 50\ [97]$ donc $50^{98}\equiv 50^2\ [97]$. Or, $50^2=2500=25\times 97+75$ d'où $50^{98}\equiv 75\ [97]$. Le reste de la division euclidienne de $a=50^{98}$ par 97 est donc 75.
- De même, $367^{97}\equiv 367\ [97]$ donc $367^{98}\equiv 367^2\ [97]$. De plus, $367=4\times 97-21$ donc $367\equiv -21\ [97]$ et $367^2\equiv(-21)^2\ [97]$ soit $367^{98}\equiv 441\ [97]$. Or, $441=97\times 4+53$ donc $367^{98}\equiv 53\ [97]$. Le reste de la division euclidienne de $b=367^{98}$ par 97 est donc 53.
- On remarque que $1649=17\times 97$ donc $1649\equiv 0\ [97]$ et $1649^{98}\equiv 0^{98}\ [97]$ soit $1649^{98}\equiv 0\ [97]$. Le reste de la division euclidienne de $c=1649^{98}$ par 97 est donc 0.

Exercice 110 p.39 : On cherche à savoir si le nombre 101 est premier. Comme $\sqrt{101}<11$, il suffit de tester si les nombres premiers strictement inférieurs à 11 divisent ou non 101. Comme 101 est impair, il n'est pas divisible par 2 ; comme la somme de ses chiffres vaut 2 et que 2 n'est pas un multiple de 3, il n'est pas divisible par 3 ; comme le chiffre des ses unités n'est ni 0 ni 5, il n'est pas divisible par 5 ; comme $\dfrac{101}{7}\simeq 14,4$, il n'est pas divisible par 7. Finalement, il n'est divisible par aucun nombre premier strictement inférieur à 11 donc le nombre 101 est premier.
D'après le corollaire du petit théorème de Fermat, pour tout entier a, $a^{101}\equiv a\ [101]$. Par somme d'équivalences, on en déduit que $\displaystyle\sum_{a=1}^{14}a^{101}\equiv\sum_{a=1}^{14}a\ [101]$. Or, $N=\displaystyle\sum_{a=1}^{14}a=1+2+3+\cdots+13+14$ est la somme de termes consécutifs de la suite (u_n) arithmétique de raison 1 de premier terme $u_1=1$. Ainsi,

$$N=\text{nombre de termes}\times\frac{\text{premier terme}+\text{dernier terme}}{2}=14\times\frac{1+14}{2}=7\times 15=105$$

Or, $105=101+4$ donc $105\equiv 4\ [101]$. Finalement, $\displaystyle\sum_{a=1}^{14}a^{101}\equiv 4\ [101]$.

Le reste de la division euclidienne de $\displaystyle\sum_{a=1}^{14}a^{101}$ par 101 est donc 4.