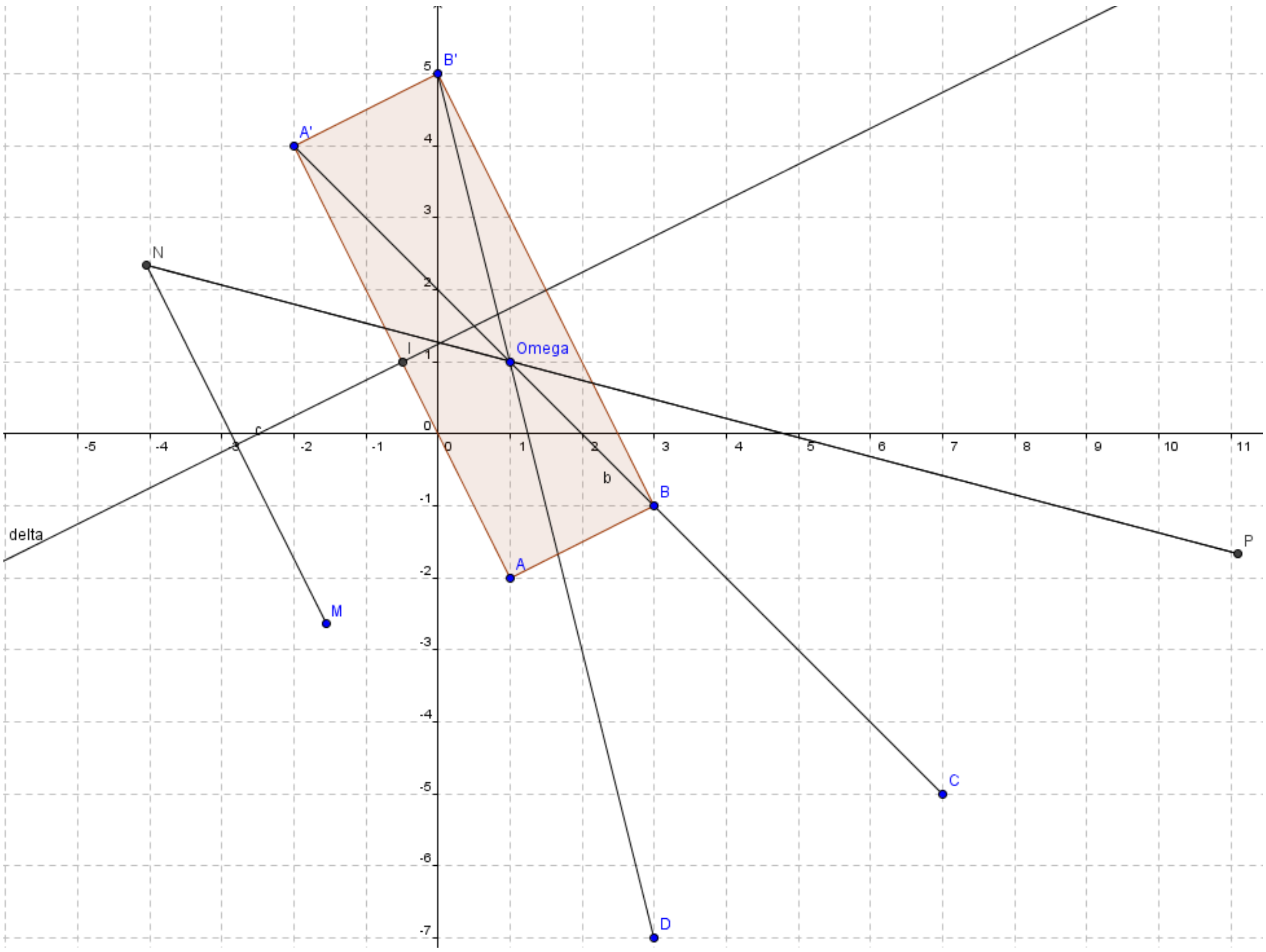
CORRECTION D'EXERCICES DU LIVRE SUR LES SIMILITUDES INDIRECTES

Exercice 95 p.78 :



1. (a) On commence par démontrer que $ABB'A'$ est un parallélogramme.

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 3 - i - 1 + 2i = 2 + i \quad \text{et} \quad z_{\overrightarrow{A'B'}} = z_{B'} - z_{A'} = 5i + 2 - 4i = 2 + i$$

Comme $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{A'B'}}$ alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ donc le quadrilatère $ABB'A$ est un parallélogramme. De plus,$(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AA'}) \equiv \arg\left(\dfrac{z_{A'} - z_A}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]$

$$\frac{z_{A'} - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-2 + 4i - 1 + 2i}{3 - i - 1 + 2i} = \frac{-3 + 6i}{2 + i} = \frac{(-3 + 6i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{-6 - 6i + 12i + 6}{4 + 1} = \frac{6i}{5}$$

Comme $\dfrac{6i}{5}$ est un imaginaire pur, $\arg\left(\dfrac{z_{A'} - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ donc $(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AA'}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $ABB'A'$ est un parallélogramme possédant un angle droit. C'est donc un rectangle.

(b) Comme $s(A) = A'$, l'axe Δ de la symétrie est perpendiculaire à $[AA']$ et passe par le milieu I de $[AA']$. Or, $z_{\overrightarrow{AA'}} = z_{A'} - z_A = -2 + 4i - 1 + 2i = -3 + 6i$ donc $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$. Ce vecteur est

colinéaaire à $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ qui est un vecteur normal de Δ. On peut donc chercher une équation de Δ sous la forme $-x+2y+c=0$.
De plus, $x_I=\dfrac{x_A+x_{A'}}{2}=\dfrac{1-2}{2}=-\dfrac{1}{2}$ et $y_I=\dfrac{y_A+y_{A'}}{2}=\dfrac{-2+4}{2}=\dfrac{2}{2}=1$ donc $I\,(-\dfrac{1}{2}\,;\,1)\in\Delta$.
En particulier, $-x_I+2y_I+c=0$ soit $\dfrac{1}{2}+2+c=0$ c'est-à-dire $c=-\dfrac{5}{2}$. La droite Δ a donc pour équation $-x+2y-\dfrac{5}{2}=0\ \Leftrightarrow\ y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{4}$.

(c) On sait qu'une symétrie axiale est une similitude indirecte. Son écriture complexe est donc sous la forme $z'=a\overline{z}+b$ et cette écriture caractérise de manière unique chaque similitude indirecte. Il suffit alors de vérifier que si $z'=\left(\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i\right)\overline{z}+2i-1$ alors l'image de z_A est $z_{A'}$ et l'image de z_B est $z_{B'}$.

$$z'_A=\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right)\overline{z_A}+2i-1=\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right)(1+2i)+2i-1=\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i+\frac{4}{5}i-\frac{8}{5}+2i-1=-2+4i=z_{A'}$$

$$z'_B=\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right)\overline{z_B}+2i-1=\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right)(3+i)+2i-1=\frac{9}{5}+\frac{3}{5}i+\frac{12}{5}i-\frac{4}{5}+2i-1=5i=z_{B'}$$

L'écriture complexe donnée dans l'énoncé correspond bien à la symétrie s.

2. (a)

$$\begin{aligned}z_C&\\ &=\left(-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i\right)\overline{z_A}+5-i=\left(-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i\right)(1+2i)+5-i=-\frac{6}{5}-\frac{12}{5}i-\frac{8}{5}i+\frac{16}{5}+5-i\\ &=2-4i+5-i=7-5i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_D&=\left(-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i\right)\overline{z_B}+5-i=\left(-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i\right)(3+i)+5-i=-\frac{18}{5}-\frac{6}{5}i-\frac{24}{5}i+\frac{8}{5}+5-i\\ &=-2+5-6i-i=3-7i\end{aligned}$$

(b) L'écriture complexe de h est

$$z'=-2(z-z_\omega)+z_\Omega=-2(z-1-i)+1+i=-2z+2+2i+1+i=-2z+3+3i$$

L'image de A' par h a pour affixe

$$z_{h(A')}=-2z_{A'}+3+3i=-2(-2+4i)+3+3i=4-8i+3+3i=7-5i=z_C$$

On en déduit que $h(A')=C$. L'image de B' par h a pour affixe

$$z_{h(B')}=-2z_{B'}+3+3i=-2(5i)+3+3i=-10i+3+3i=3-7i=z_D$$

Ainsi, $h(B')=D$.

(c) h^{-1} est la similitude réciproque de h. C'est une similitude directe de centre Ω (le même que h), de rapport $\dfrac{1}{2}$ (car h est de rapport $|-2|=2$) et d'angle $-\pi$ (l'opposé de l'angle de h) ou encore π ($-\pi\equiv\pi\ [2\pi]$). h^{-1} est donc l'hométhétie de centre Ω et de rapport $-\dfrac{1}{2}$ et son écriture complexe $z=-\dfrac{1}{2}(z_1-1-i)+1+i=-\dfrac{1}{2}\,z_1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i+1+i=-\dfrac{1}{2}\,z_1+\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i$.

3. (a) Soit M un point d'affixe z. On note $M_2=g(M)$ d'affixe z_2. Alors $z_2=\left(-\dfrac{6}{5}-\dfrac{8}{5}i\right)\overline{z}+5-i$. De plus, si on note $M_1=h^{-1}(M_2)$ alors $z_1=-\dfrac{1}{2}\,z_2+\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i=-\dfrac{1}{2}\left(\left(-\dfrac{6}{5}-\dfrac{8}{5}i\right)\overline{z}+5-i\right)+\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i$.
L'écriture complexe de $f=h^{-1}\circ g$ est donc

$$z'=\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right)\overline{z}-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i=\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right)\overline{z}-1+2i$$

(b) On reconnaît l'écriture complexe de la réflexion s introduite à la question 1. Ainsi, $h^{-1}\circ g = s$ et donc $h\circ h^{-1}\circ g = h\circ s$ d'où $g = h\circ s$. Pour construire P image de M par g, on commence par construire N, image de M par s puis on fait subir à N une homothétie de centre Ω et de rapport -2 : le point M est alors défini vectoriellement par $\overrightarrow{\Omega M} = -2\overrightarrow{\Omega N}$.

Exercice 98 p.78 :

1. On pose $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$ alors :
$$x'+iy' = \frac{3+4i}{5}(x-iy)+\frac{1-2i}{5} = \frac{3x-3iy+4ix+4y+1-2i}{5} = \frac{3x+4y+1}{5}+i\frac{4x-3y-2}{5}$$
En identifiant parties réelles et parties imaginaires on obtient : $\begin{cases} x' = \dfrac{3x+4y+1}{5} \\ y' = \dfrac{4x-3y-2}{5}\end{cases}$

2. (a) Les points invariants par z vérifient $z' = z \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x+4y+1}{5} = x \\ \dfrac{4x-3y-2}{5} = y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4y+1 = 5x \\ 4x-3y-2 = 5y\end{cases}$
c'est-à-dire : $\begin{cases} 2x-4y-1 = 0 \\ 4x-8y-2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow 2x-4y-1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$; Il s'agit de de l'équation d'une droite.

   (b) Puisque f admet une droite comme ensemble de points invariants,d 'après le cours, f est soit l'identité soit la réflexion d'axe la droite invariante. Puisque l'ensemble des points invariants est seulement une droite, f n'est pas l'identité mais la reflexion d'axe $\Delta : y = \frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$.

3. $z'\in\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 4x-3y-2 = 0$.
L'ensemble D est donc la droite d'équation $4x-3y-2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x-\frac{2}{3}$

4. (a) On remarque que $4\times 2-3\times 2 = 8-2 = 6$ donc $(x_0\,;\,y_0) = (2\,;\,2)$ est solution particulière dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x-3y = 2$.
$(x\,,\,y)$ est solution de $4x-3y = 2$ signifie que $4x-3y = 2 = 4x_0-3y_0$ d'où $4x-4x_0 = 3y-3y_0$ c'est-à-dire que $4(x-x_0) = 3(y-y_0)$. Comme $y-y_0\in\mathbb{Z}$, alors 3 divise $4(x-x_0)$. Or $PGCD(3\,;\,4) = 1$ donc 3 divise $(x-x_0)$ d'après le théorème de Gauss. Ainsi, il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x-x_0 = 3k$ soit $x = x_0+3k = 2+3k$. En remplaçant dans l'équation $4(x-x_0) = 3(y-y_0)$, on obtient que $12k = 3(y-y_0)$ d'où $y-y_0 = 4k$ c'est-à-dire que $y = y_0+4k = 2+4k$. Finalement, si $(x\,,\,y)$ est solution de $4x-3y = 2$ alors il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x = 2+3k$ et $y = 2+4k$.
Réciproquement, s'il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $(x\,,\,y) = (2+3k\,,\,2+4k)$ alors
$$4x-3y = 4(2+3k)-3(2+4k) = 8+12k-6-12k = 2$$
donc $(x\,,\,y)$ est solution de $4x-3y = 2$.
L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \{(2+3k\,;\,2+4k)\,,\,k\in\mathbb{Z}\}$.

5. $\mathrm{Re}(z')\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x' = \dfrac{3x+4y+1}{5}\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \dfrac{4+4y}{5}\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow 5$ divise $4(y+1)$.
Comme $PGCD(5\,;\,4) = 1$, si 5 divise $4(y+1)$ alors 5 divise $y+1$ d'après le théorème de Gauss et donc $y+1\equiv 0$ [5], c'est-à-dire $y\equiv -1$ [5].
$\mathrm{Im}(z')\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow y' = \dfrac{4x-3y-2}{5}\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow y' = \dfrac{2-3y}{5}\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow 5$ divise $2-3y \Leftrightarrow 2-3y\equiv 0$ [5].
On a déjà remarqué que pour que $\mathrm{Re}(z')$ soit entier, il est nécessaire que $y\equiv -1$ [5]. Dans ce cas, $-3y\equiv 3[5]$ et $2-3y\equiv 5$ [5] d'où $2-3y\equiv 0$ [5].
On a ainsi justifié que si $\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z')$ sont entiers alors $y\equiv -1$ [5]. Réciproquement, si $y\equiv -1$ [5] alors on a déjà obtenu que $\mathrm{Im}(z')\in\mathbb{Z}$ et comme $y+1\equiv 0$ [5], alors $4(y+1)\equiv 0$ [5] donc $\mathrm{Re}(z')$ est également entier.
Les nombres y cherchés sont tous les entiers congrus à -1 modulo 5.

Exercice 74 p.73 :

1. (a) Soit M_1 l'image de M (d'affixe z) par f. L'affixe de M_1 est alors $z_1 = \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z}$. Si on note M_2 l'image de M_1 par f, son affixe z_2 est $z_2 = \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z_1} = \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z}}$.

$$z_2 = \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)z = z$$

L'application $f \circ f$ correspond donc à l'identité.

(b) L'écriture complexe de f est $z' = \left(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})\right)\overline{z} = e^{i\frac{\pi}{3}}\overline{z}$. On considère donc la symétrie axiale S d'axe (Ox) et la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. L'écriture complexe de S est $z \mapsto \overline{z}$ et celle de R est $z \mapsto e^{i\frac{\pi}{3}}z$ donc la composée $R \circ S$ a pour écriture complexe $z \mapsto e^{i\frac{\pi}{3}}\overline{z}$, il s'agit donc de f.

(c) Comme f est la composée d'une rotation (similitude directe) et d'une réflexion, alors f est une similitude indirecte. Pour déterminer les points invariants de f, on écrit z sous forme algébrique : $z = x+iy$. Alors M d'affixe z est invariant signifie que

$$x+iy = \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x-iy) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}iy + i\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = \frac{x+\sqrt{3}y}{2} + i\frac{-y+\sqrt{3}x}{2}$$

En identifiant parties réelles et parties imaginaires, cela donne :

$$\begin{cases} \dfrac{x+\sqrt{3}y}{2} = x \\ \dfrac{-y+\sqrt{3}x}{2} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\sqrt{3}y = 2x \\ -y+\sqrt{3}x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\sqrt{3}y = 0 \\ 3y-\sqrt{3}x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\sqrt{3}y = 0 \\ -\sqrt{3}(x-\sqrt{3}y) = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des points $M(x\,,\,y)$ invariants par f a pour équation $x-\sqrt{3}y = 0$. C'est donc une droite. Comme f est une similitude indirecte ayant pour ensemble de points invariants une droite, c'est une symétrie axiale d'axe $\mathcal{D}_1$ d'équation $x-\sqrt{3}y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}x = \frac{\sqrt{3}}{3}x$. Comme $f = R \circ S$, alors $R = f \circ S^{-1} = f \circ S$ est une décomposition de R en deux symétriques axiales.

2. (a) On utilise la forme algébrique pour déterminer les points invariants :

$$z'' = z \quad \Leftrightarrow \quad x+iy = \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x-iy) - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x+iy = \frac{x+\sqrt{3}y}{2} + i\frac{-y+\sqrt{3}x}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x+\sqrt{3}y-1}{2} + i\frac{-y+\sqrt{3}x+\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+\sqrt{3}y-1}{2} = x \\ \dfrac{-y+\sqrt{3}x+\sqrt{3}}{2} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\sqrt{3}y-1 = 2x \\ -y+\sqrt{3}x+\sqrt{3} = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3}y-1 \\ \sqrt{3}x = 3y-\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3}y-1 \\ x = \sqrt{3}y-1 \end{cases}$$

L'ensemble des points invariants de g est la droite $\mathcal{D}_2$ d'équation

$$x-\sqrt{3}y+1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(b) On considère l'application ayant pour écriture complexe $z \mapsto z - \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Alors, z'' est l'image de $z' = \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z}$ par cette application donc on peut écrire $g = T \circ f$ ou T désigne la transformation associée à $z \mapsto z - \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Cette transformation est alors la translation de vecteur $\vec{V}$ avec $z_{\vec{V}} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(c) Comme g est la composée d'une similitude diecte (T) et d'une symétrie axiale (f), alors g est une similitude indirecte. L'ensemble de ses points invariants est la droite $\mathcal{D}_2$ donc g est nécessairement une symétrie axiale d'axe $\mathcal{D}_2$.
Comme $g = T \circ f$, alors $g \circ f^{-1} = T$ et vu que $f \circ f = id$, alors $f^{-1} = f$ d'où $T = g \circ f$ est la composée de deux symétries axiales.

(d) L'image par g de A est le point A' d'affixe :

$$\begin{aligned} z_{A'} &= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z_A} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = z_A \end{aligned}$$

On en déduit que $g(A) = A$.

La droite $\mathcal{D}_2$ passe par A et a le même coefficient directeur de $\mathcal{D}_1$ donc pour la construire il suffit de tracer la droite qui passe par A et parallèle à la droite $\mathcal{D}_1$ déjà tracée. poru placer A, on remarque que $z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}$.