

CORRECTION DE L'EXERCICE 66 p.104

1. (a) $M\,(x\,;\,y\,;\,z) \in S_1 \;\Leftrightarrow\; z = xy^2$.
   - $M\,(x\,;\,y\,;\,-z) \in S_1 \;\Leftrightarrow\; -z = xy^2$. Cette équation n'équivaut pas à $z = xy^2$ donc le plan (xOy) n'est pas un plan de symétrie pour S_1.
   - $M\,(-x\,;\,y\,;\,z) \in S_1 \;\Leftrightarrow\; z = -xy^2$. Cette équation n'équivaut pas à $z = xy^2$ donc le plan (yOz) n'est pas un plan de symétrie pour S_1.
   - $M\,(x\,;\,-y\,;\,z) \in S_1 \;\Leftrightarrow\; z = x(-y)^2 = xy^2 \;\Leftrightarrow\; M\,(x\,;\,y\,;\,z) \in S_1$. Le plan (xOz) est un plan de symétrie pour S_1.

   (b) $M\,(x\,;\,y\,;\,z) \in S_2 \;\Leftrightarrow\; z = x^2 + 4y^2$.
   - $M\,(x\,;\,y\,;\,-z) \in S_2 \;\Leftrightarrow\; -z = x^2 + 4y^2$. Cette équation n'équivaut pas à $z = x^2 + 4y^2$ donc le plan (xOy) n'est pas un plan de symétrie pour S_2.
   - $M\,(-x\,;\,y\,;\,z) \in S_2 \;\Leftrightarrow\; z = (-x)^2 + 4y^2 = x^2 + 4y^2 \;\Leftrightarrow\; M\,(x\,;\,y\,;\,z) \in S_2$. Le plan (yOz) est un plan de symétrie pour S_2.
   - $M\,(x\,;\,-y\,;\,z) \in S_2 \;\Leftrightarrow\; z = x^2 + 4(-y)^2 = x^2 + 4y^2 \;\Leftrightarrow\; M\,(x\,;\,y\,;\,z) \in S_2$. Le plan (xOz) est un plan de symétrie pour S_2.

   (c) $M\,(x\,;\,y\,;\,z) \in S_3 \;\Leftrightarrow\; z = x^2(x^2 - y^2)$.
   - $M\,(x\,;\,y\,;\,-z) \in S_3 \;\Leftrightarrow\; -z = x^2(x^2 - y^2)$. Cette équation n'équivaut pas à $z = x^2(x^2 - y^2)$ donc le plan (xOy) n'est pas un plan de symétrie pour S_3.
   - $M\,(-x\,;\,y\,;\,z) \in S_3 \;\Leftrightarrow\; z = (-x)^2((-x)^2 - y^2) = x^2(x^2 - y^2) \;\Leftrightarrow\; M\,(x\,;\,y\,;\,z) \in S_3$. Le plan (yOz) est un plan de symétrie pour S_3.
   - $M\,(x\,;\,-y\,;\,z) \in S_3 \;\Leftrightarrow\; z = x^2(x^2 - (-y)^2) = x^2(x^2 - y^2) \;\Leftrightarrow\; M\,(x\,;\,y\,;\,z) \in S_3$. Le plan (xOz) est un plan de symétrie pour S_3.

   (d) $M\,(x\,;\,y\,;\,z) \in S_4 \;\Leftrightarrow\; z = y^2(x - y)$.
   - $M\,(x\,;\,y\,;\,-z) \in S_4 \;\Leftrightarrow\; -z = y^2(x - y)$. Cette équation n'équivaut pas à $z = y^2(x - y)$ donc le plan (xOy) n'est pas un plan de symétrie pour S_4.
   - $M\,(-x\,;\,y\,;\,z) \in S_4 \;\Leftrightarrow\; z = y^2(-x - y)$. Cette équation n'équivaut pas à $z = y^2(x - y)$ donc le plan (yOz) n'est pas un plan de symétrie pour S_4.
   - $M\,(x\,;\,-y\,;\,z) \in S_4 \;\Leftrightarrow\; z = (-y)^2(x + y) = y^2(x + y)$. Cette équation n'équivaut pas à $z = y^2(x - y)$ donc le plan (xOz) n'est pas un plan de symétrie pour S_4.

2. (a)
   - $M(x\,;\,-y\,;\,-z) \in S_1 \;\Leftrightarrow\; -z = x(-y)^2 = xy^2$. Cette équation n'équivaut pas à $z = xy^2$ donc la droite (Ox) n'est pas axe de symétrie pour S_1.
   - $M(-x\,;\,y\,;\,-z) \in S_1 \;\Leftrightarrow\; -z = -x(y)^2 = -xy^2 \;\Leftrightarrow\; z = xy^2 \;\Leftrightarrow\; M(x\,;\,y\,;\,z) \in S_1$. La droite (Oy) est axe de symétrie pour S_1.
   - $M(-x\,;\,-y\,;\,z) \in S_1 \;\Leftrightarrow\; z = -x(-y)^2 = -xy^2$. Cette équation n'équivaut pas à $z = xy^2$ donc la droite (Oz) n'est pas axe de symétrie pour S_1.

   (b)
   - $M(x\,;\,-y\,;\,-z) \in S_2 \;\Leftrightarrow\; -z = x^2 + 4(-y)^2 \;\Leftrightarrow\; -z = x^2 + 4y^2$. Cette équation n'équivaut pas à $z = x^2 + 4y^2$ donc la droite (Ox) n'est pas axe de symétrie pour S_2.
   - $M(-x\,;\,y\,;\,-z) \in S_2 \;\Leftrightarrow\; -z = -(-x)^2 + 4y^2 = x^2 + 4y^2$. Cette équation n'équivaut pas à $z = x^2 + 4y^2$ donc la droite (Oy) n'est pas axe de symétrie pour S_2.
   - $M(-x\,;\,-y\,;\,z) \in S_2 \;\Leftrightarrow\; z = (-x)^2 + 4(-y)^2 = x^2 + 4y^2 \;\Leftrightarrow\; M(x\,;\,y\,;\,z) \in S_2$. La droite (Oz) est axe de symétrie pour S_2.

   (c)
   - $M(x\,;\,-y\,;\,-z) \in S_3 \;\Leftrightarrow\; -z = x^2(x^2 - (-y)^2) = x^2(x^2 - y^2)$ Cette équation n'équivaut pas à $z = x^2(x^2 - y^2)$ donc la droite (Ox) n'est pas axe de symétrie pour S_3.
   - $M(-x\,;\,y\,;\,-z) \in S_3 \;\Leftrightarrow\; -z = (-x)^2((-x)^2 - (y)^2) = x^2(x^2 - y^2)$. Cette équation n'équivaut pas à $z = x^2(x^2 - y^2)$ donc la droite (Oy) n'est pas axe de symétrie pour S_3.
   - $M(-x\,;\,-y\,;\,z) \in S_3 \;\Leftrightarrow\; z = (-x)^2((-x)^2 - (-y)^2) = x^2(x^2 - y^2) \;\Leftrightarrow\; M(x\,;\,y\,;\,z) \in S_3$. La droite (Oz) est axe de symétrie pour S_3.

(d)
- $M(x\,;\,-y\,;\,-z) \in S_4 \iff -z = (-y)^2(x+y) = y^2(x+y)$. Cette équation n'équivaut pas à $z = y^2(x-y)$ donc la droite (Ox) n'est pas axe de symétrie pour S_4.
- $M(-x\,;\,y\,;\,-z) \in S_4 \iff -z = y^2(-x-y) = -y^2(x+y)$. Cette équation n'équivaut pas à $z = y^2(x-y)$ donc la droite (Oy) n'est pas axe de symétrie pour S_4.
- $M(-x\,;\,-y\,;\,z) \in S_4 \iff z = (-y)^2(-x-y) = y^2(x+y)$. Cette équation n'équivaut pas à $z = y^2(x-y)$ donc la droite (Oz) n'est pas axe de symétrie pour S_4.

3. (a) $M(-x\,;\,-y\,;\,-z) \in S_1 \iff -z = -x(-y)^2 \iff z = xy^2 \iff M(x\,;\,y\,;\,z) \in S_1$ donc le point O est centre de symétrie de S_1.

   (b) $M(-x\,;\,-y\,;\,-z) \in S_2 \iff -z = (-x)^2 + 4(-y)^2 \iff -z = x^2 + 4y^2$. Cette équation n'équivaut pas à $z = x^2 + 4y^2$ donc le point O n'est pas centre de symétrie de S_2.

   (c) $M(-x\,;\,-y\,;\,-z) \in S_3 \iff -z = (-x)^2((-x)^2 - (-y)^2) = x^2(x^2 - y^2)$ Cette équation n'équivaut pas à $z = x^2(x^2 - y^2)$ donc le point O n'est pas centre de symétrie de S_3.

   (d) $M(-x\,;\,-y\,;\,-z) \in S_4 \iff -z = (-y)^2(-x+y) = -y^2(x-y) \iff z = y^2(x-y) \iff M(x\,;\,y\,;\,z) \in S_4$ donc le point O est centre de symétrie de S_4.

4. Pour la surface (a), on remarque que O est centre de symétrie donc il s'agit soit de S_1 soit de S_4. Le plan (xOz) (d'équation $y = 0$) apparait également comme un plan de symétrie de cette surface donc on élimine S_4 et il s'agit de S_1.
   Pour la surface (b), on remarque que O n'est pas centre de symétrie donc il s'agit soit de S_2 soit de S_3. Ces deux surfaces ont les mêmes caractéristiques de symétrie. On constate sur la figure (b) que les côtes sont toujours positives, autrement dit z semble être un nombre toujours positif. Il s'agit donc de la surface S_2 puisque dans sa définition $z = x^2 + 4y^2$ est la somme de deux carrés alors que pour S_3, le signe de $x^2(x^2 - y^2)$ dépend de la position de x par rapport à y.
   La surface de la figure (c) n'admet pas O comme centre de symétrie, c'est donc S_3. Enfin, la surface proposée en (d) est alors la surface S_4.