CORRECTION DES EXERCICES POUR LE VENDREDI 20 MAI

Exercice 4 : On résout le système $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-x+2y+4z=1 \\ z=-1 \end{cases}$.

En remplaçant z par -1 dans la première équation on obtient :

$$x^2+y^2+1-x+2y-4=1 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+(y+1)^2-1=4 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=5+\frac{1}{4}=\frac{21}{4}$$

Le système à résoudre pour déterminer l'intersection recherchée est $\begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{21}{4} \\ z=-1 \end{cases}$. On retrouve l'équation d'un cercle inclus dans le plan d'équation $z=-1$ dont le centre est $\Omega\left(\frac{1}{2}\,;\,-1\,;\,-1\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{21}}{2}$.

Exercice 5 :

1. On résout $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=-5 \end{cases}$. C'est l'équation du cercle de centre $A\,(0,0,-5)$ et de rayon 2 inclus dans le plan d'équation $z=-5$.
2. On résout $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4=4 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \\ z=t \end{cases}$; $t\in\mathbb{R}$. Il s'agit de l'équation (paramétrique) de la droite passant par $B\,(0,2,0)$ et de vecteur directeur $\vec{w}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 42 p.101 : Une équation de cylindre d'axe (Oz) s'écrit sous la forme : $x^2+y^2=r^2$. Pour $x=4$, l'équation devient $16+y^2=r^2 \Leftrightarrow y^2=r^2-16$. L'intersection du cylindre avec le plan d'équation $x=4$ n'est pas vide ou réduite à un point à condition que $r^2-16>0$. Dans ce cas, là, les points $M\,(x\,;\,y\,;\,z)$ de l'intersection cherchée ont des coordonnées telles que : $\begin{cases} x=4 \\ y=\pm\sqrt{r^2-16} \\ z=t \end{cases}$; $t\in\mathbb{R}$.

C'est donc la réunion de deux droites d'équations respectives : $\begin{cases} x=4 \\ y=\sqrt{r^2-16} \end{cases}$ et $\begin{cases} x=4 \\ y=-\sqrt{r^2-16} \end{cases}$. Cela correspond aux droites d'équations respectives $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$ et $\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$ si et seulement si $\sqrt{r^2-16}=3$ soit $r^2-16=9$ et donc $r^2=16+9=25$. L'équation du cylindre est donc $x^2+y^2=25$.

Pour déterminer la section du cylindre par le plan d'équation $z=4$, on s'intéresse au système $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ z=4 \end{cases}$.
La section est donc le cercle de centre $I\,(0,0,4)$ et de rayon 5, inclus dans le plan d'équation $z=4$.

Exercice 25 p.100 :

$$z^2+y^2-x^2-4x+2y-3=0 \Leftrightarrow z^2+(y+1)^2-1-3=(x+2)^2-4 \Leftrightarrow z^2+(y+1)^2=(x+2)^2$$

Or, $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ donc l'équation de la surface équivaut à $(y+1)^2+z^2=\tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right)(x+2)^2$. On retrouve l'équation d'un cône dont l'axe est parallèle à (Ox) : plus précisément, cet axe est la droite parralèlle à (Ox) coupant le plan (yOz) au point $(0\,;\,-1\,;\,0)$. Le sommet est $A\,(-2\,;\,-1\,;\,0)$ et le demi-angle au sommet vaut $\frac{\pi}{4}$.