CORRECTION DES EXERCICES POUR LE VENDREDI 15 OCTOBRE

Exercice 4 p.30 : On effectue la division euclidienne de $3n+7$ par $n+3$.
On remarque que $3n+7 = 3(n+3)-2$ mais comme le reste doit être positif, l'égalité précédente ne correspond pas à une division euclidienne. On a également : $3n+7 = 2(n+3)+n+1$. Le nombre $n+1$ correspond au reste de la division euclidienne si et seulement si : $0 \leqslant n+1 < n+3$. Comme $n \in \mathbb{N}$ cet encadrement est toujours vrai donc le reste de la division euclidienne de $3n+7$ par $n+3$ est toujours égal à $n+1$.

Exercice H :

- $2489 = 80 \times 31 + 9$; comme $0 \leqslant 9 < 31$ alors l'égalité précédente correspond à la division euclidienne de 2489 par 31 (le quotient vaut 80 et le reste 9).
- $-15894 = 67 \times (-238) + 52$; comme $0 \leqslant 52 < 67$, alors l'égalité précédente correspond à la division euclidienne de -15894 par 67 (le quotient vaut -238 et le reste 52).
- Pour la division euclidienne de -1358 par -13, le dividende -13 est négatif donc on commence par chercher la division euclidienne de -1358 par 13 : $-1358 = 13 \times (-105) + 7$ d'où $-1358 = (-13) \times 105 + 7$ avec $0 \leqslant 7 < |-13|$. Dans la division euclidienne de -1358 par -13 le quotient vaut donc 105 et le reste 7.

Exercice J : Soit n un entier naturel. On note $(q\,;r)$ le couple de nombres entiers obtenu par division euclidienne de n par 7 tels que $n = 7q + r$ avec $0 \leqslant r < 7$. On cherche toutes les valeurs de n telles que $q = r$. Cela revient à chercher n sous la forme $n = 7r + r = 8r$ avec r entier vérifiant $0 \leqslant r < 7$. Il y a donc 7 valeurs de n possibles : $n = 8 \times 0 = 0$, $n = 8 \times 1 = 8$, $n = 8 \times 2 = 16$, $n = 8 \times 3 = 24$, $n = 8 \times 4 = 32$, $n = 8 \times 5 = 40$, $n = 8 \times 6 = 48$.

Exercice M :

1. Si $n \in \mathbb{N}$, en effectuant la division euclidienne de n par 5, on sait qu'il existe un unique couple d'entiers $(k\,;r)$ tels que $n = 5k + r$ avec $0 \leqslant r < 5$. Pour $r = 0$, n s'écrit donc sous la forme $n = 5k$; pour $r = 1$, on obtient $n = 5k+1$; pour $r = 2$, $n = 5k+2$; pour $r = 3$, $n = 5k+3$; pour $r = 4$, $n = 5k+4$. De plus, $k \in \mathbb{N}$ car si $k \leqslant -1$, $5k < 0$; $5k+1 \leqslant -4 < 0$; $5k+2 \leqslant -3 < 0$; $5k+3 \leqslant -2 < 0$ et $5k+4 \leqslant -1 < 0$. Comme $n \in \mathbb{N}$, tous ces cas sont impossibles.
2. On va raisonner "modulo 5".
   - Si $n = 5k$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors n est divisible par 5 et $n \equiv 0\ [5]$. Ainsi, $n^2 \equiv 0^2\ [5]$ et $4n \equiv 0\ [5]$ donc $n^2 - 4n \equiv 0\ [5]$. Dans ce cas, le reste de la division euclidienne de $n^2 - 4n$ par 5 est 0.
   - Si $n = 5k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors $n-1$ est divisible par 5 d'où $n \equiv 1\ [5]$. Dans ce cas, $n^2 \equiv 1^2\ [5]$ et $4n \equiv 4\ [5]$ d'où $n^2 - 4n \equiv 1 - 4\ [5]$ soit $n^2 - 4n \equiv -3\ [5]$. Or, $-3 \equiv 2\ [5]$ car 5 divise $-3-2$ d'où $n^2 - 4n \equiv 2\ [5]$, ce qui implique que le reste de la division euclidienne de $n^2 - 4n$ par 5 est 2.
   - Si $n = 5k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors $n \equiv 2\ [5]$ donc $n^2 \equiv 2^2\ [5]$ et $4n \equiv 8\ [5]$. Ainsi, $n^2 - 4n \equiv -4\ [5]$. Or, $-4 \equiv 1\ [5]$ car 5 divise $-4-1$ donc $n^2 - 4n \equiv 1\ [5]$, ce qui signifie que le reste de la division euclidienne de $n^2 - 4n$ par 5 est 1.
   - Si $n = 5k+3$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors $n \equiv 3\ [5]$ donc $n^2 \equiv 3^2\ [5]$. De plus, $4n \equiv 12\ [5]$ d'où $n^2 - 4n \equiv -3\ [5]$. Comme $-3 \equiv 2\ [5]$ (car 5 divise $-3-2=$ alors $n^2 - 4n \equiv 2\ [5]$ donc le reste de la division euclidienne de $n^2 - 4n$ par 5 est 2.
   - Si $n = 5k+4$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors $n \equiv 4\ [5]$ donc $n^2 \equiv 4^2\ [5]$. De plus, $4n \equiv 16\ [5]$ d'où $n^2 - 4n \equiv 0\ [5]$. Ainsi, le reste de la division euclidienne de $n^2 - 4n$ par 5 est 0.

   On peut résumer dans le tableau suivant les résultats obtenus :

n congru à .... modulo 5	0	1	2	3	4
reste dans la division euclidienne de $n^2 - 4n$ par 5	0	2	1	2	0

3. D'après le tableau précédent, le reste dans la division de $n^2 - 4n$ par 5 vaut 2 si et seulement si $n \equiv 1\ [5]$ ou $n \equiv 3\ [5]$. L'ensemble des entiers naturels cherché est $\mathcal{S} = \{5k+1\,,\, 3k+1\,;\, k \in \mathbb{N}\}$

Exercice O : Pour montrer qu'un nombre est divisible par 7, une des méthodes consiste à prouver qu'il est congru à 0 modulo 7.
On sait que $4 \equiv (-3)$ [7] car 7 divise $4 + 3 = 7$ donc $4^{2007} \equiv (-3)^{2007}$ [7]. Comme 2007 est un nombre impair, $(-3)^{2007} = -3^{2007}$ donc $4^{2007} \equiv -(3^{2007})$ [7].
De la même façon, on remarque que $5 \equiv (-2)$ [7] car 7 divise $5 + 2 = 7$ d'où $5^{2007} \equiv (-2)^{2007}$ [7] soit $5^{2007} \equiv -(2^{2007})$ [7].
Enfin, $6 \equiv -1$ [7] (car 7 divise $6 + 1 = 7$) d'où $6^{2007} \equiv (-1)^{2007}$ [7] soit $6^{2007} \equiv -(1^{2007})$.
Par somme, on obtient : $1^{2007} + 2^{2007} + 3^{2007} + 4^{2007} + 5^{2007} + 6^{2007} \equiv 1^{2007} + 2^{2007} + 3^{2007} - 3^{2007} - 2^{2007} - 1^{2007}$ [7] soit $1^{2007} + 2^{2007} + 3^{2007} + 4^{2007} + 5^{2007} + 6^{2007} \equiv 0$ [7]. On en déduit que $1^{2007} + 2^{2007} + 3^{2007} + 4^{2007} + 5^{2007} + 6^{2007}$ est divisible par 7.

Exercice 10 de la feuille :

1. On va raisonner "modulo 7" pour déterminer le cube d'un entier x quelconque.
   - Si $x \equiv 0$ [7], alors $x^3 \equiv 0$ [7].
   - Si $x \equiv 1$ [7], alors $x^3 \equiv 1$ [7].
   - Si $x \equiv 2$ [7], alors $x^3 \equiv 2^3$ [7]. Or $8 \equiv 1$ [7] car 7 divise $8 - 1 = 7$. Ainsi, $x^3 \equiv 1$ [7].
   - Si $x \equiv 3$ [7], alors $x^3 \equiv 3^3$ [7]. Or, $27 \equiv -1$ [7] car $27 + 1 = 28$ est divisible par 7 d'où $x^3 \equiv -1$ [7].
   - Si $x \equiv 4$ [7], alors $x^3 \equiv 4^3$ [7]. Or, $4^3 = 64 \equiv 1$ [7] puisque $64 - 1 = 63 = 7 \times 9$ est un multiple de 7. Ainsi, $x^3 \equiv 1$ [7].
   - Si $x \equiv 5$ [7], alors $x^3 = 5^3$ [7]. Or, $5^2 = 25 \equiv 4$ [7] car 7 divise $25 - 4 = 21$. Ainsi, $5^3 \equiv 5 \times 4$ [7]. Comme $20 \equiv -1$ [7] (car 7 divise $20 + 1 = 21$) alors $x^3 \equiv -1$ [7]
   - Si $x \equiv 6$ [7], alors $x^3 \equiv 6^3$ [7]. Or, $6^2 = 36 \equiv 1$ [7] car $36 - 1 = 35 = 7 \times 5$ est un multiple de 7. On en déduit que $6^3 \equiv 6$ [7], mais comme $6 \equiv (-1)$ [7] (car 7 divise $6 + 1 = 7$) alors $x^3 \equiv -1$ [7].

   On peut récapituler ses résultats dans le tableau suivant :

x est congru à .... modulo 7	0	1	2	3	4	5	6
x^3 est congru à .... modulo 7	0	1	1	-1	1	-1	-1

   On a obtenu trois cas de figures :
   - $x^3 \equiv 0$ [7], ce qui signifie que 7 divise x^3 ou encore qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x^3 = 7n$. Comme $x \in \mathbb{N}$, $x^3 \geqslant 0$ et donc $n \in \mathbb{N}$.
   - $x^3 \equiv 1$ [7], ou encore il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x^3 = 7n + 1$. Comme $x \geqslant 0$, alors $7n + 1 \geqslant 0$ donc $n \geqslant -\dfrac{1}{7}$. Comme n est entier, $n \in \mathbb{N}$.
   - $x^3 \equiv -1$ [7], c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x^3 = -1 + 7n$. Comme $x^3 \geqslant 0$, $n \geqslant \dfrac{1}{7} > 0$ d'où $n \in \mathbb{N}$.

2. On fait un tableau à double entrée récapitulant toutes les possibilités pour a et b modulo 3

b modulo 3 \ a modulo 3	0	1	2
0	$a \equiv 0$ [3]	$b \equiv 0$ [3]	$b \equiv 0$ [3]
1	$a \equiv 0$ [3]	$a - b \equiv 1 - 1$ [3]	$a + b \equiv 3$ [3]
2	$a \equiv 0$ [3]	$a + b \equiv 3$ [3]	$a - b \equiv 0$ [3]

   Comme $3 \equiv 0$ [3], alors pour chacun des cas, soit a, soit b, soit $a + b$, soit $a - b$ sont divisibles par 3.

3. Encore une fois, on va procéder par distinction de cas à l'aide d'un tableau à double entrée "modulo 7". Les résultats de ce tableau correspondent à $a^2 + b^2$ modulo 7. Comme les rôles de a et b sont symétriques, les résultats apparaissent de manière symétriques par rapport à la diagonale du tableau.

b modulo 7 \ a modulo 7	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	4	$9 \equiv 2$ [7] $(9-2=7)$	$16 \equiv 2$ [7] $(16-2=14)$	$25 \equiv 4$ [7] $(25-4=21)$	$36 \equiv 1$ [7] $(36-1=35)$
1	1	2	5	$10 \equiv 3$ [7] $(10-3=7)$	$17 \equiv 3$ [7] $(17-3=14)$	$26 \equiv 5$ [7] $(26-5=21)$	$37 \equiv 2$ [7] $(37-2=35)$
2	4	5	$8 \equiv 1$ [7] $(8-1=7)$	$13 \equiv 6$ [7] $(13-6=7)$	$20 \equiv 6$ [7] $(20-6=14)$	$29 \equiv 1$ [7] $(29-1=28)$	$40 \equiv 5$ [7] $(40-5=35)$
3	2	3	6	$18 \equiv 4$ [7] $(18-4=14)$	$25 \equiv 4$ [7]	$34 \equiv 6$ [7] $(34-6=28)$	$45 \equiv 3$ [7] $(45-3=42)$
4	2	3	6	4	$32 \equiv 4$ [7] $(32-4=28)$	$41 \equiv 6$ [7] $(41-6=35)$	$52 \equiv 3$ [7] $(52-3=49)$
5	4	5	1	6	6	$50 \equiv 1$ [7] $(50-1=49)$	$61 \equiv 5$ [7] $(61-5=56)$
6	1	2	5	3	3	5	$72 \equiv 2$ [7] $(72-2=70)$

Supposons que $a^2 + b^2$ soit un multiple de 7. Cela signifie que $a^2 + b^2 \equiv 0$ [7]. D'après le tableau précédent, ce n'est le cas que lorsque $a \equiv 0$ [7] et $b \equiv 0$ [7], c'est-à-dire lorsque a et b sont des multiples de 7.