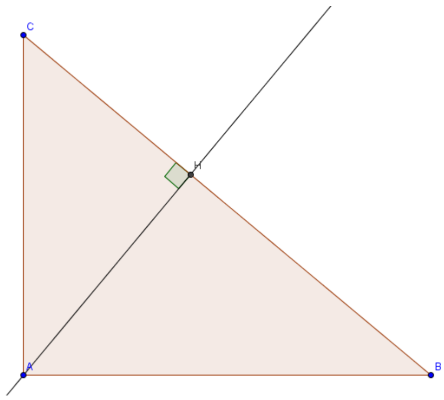
CORRECTION DES EXERCICES DE SIMILITUDES POUR VENDREDI 6 MAI

Exercice 11 : voir annexe

Exercice 12 :



1. - On sait que $s(B) = A$ donc l'image de (AB) est une droite qui passe par A. Si on note A' l'image de A par s, alors $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{AA'}\right) = \left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{s(B)s(A)}\right)$ correspond à l'angle θ de la simlilitude s. Par définition, $\theta \equiv \left(\overrightarrow{HB}\,;\overrightarrow{s(H)s(B)}\right)\ [2\pi]$ soit $\theta \equiv \left(\overrightarrow{HB}\,;\overrightarrow{HA}\right)\ [2\pi]$. Comme H est le pied de la hauteur du triangle ABC issue de A, alors $\left(\overrightarrow{HB}\,;\overrightarrow{HA}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$. (suivant quel le triangle est direct ou indirect, on obtient $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$.). Ainsi, $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{AA'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ donc (AA'), qui est l'image de (AB) par s est perpendiculaire à (AB). Finalement, l'image de (AB) par s est la droite perpendiculaire à (AB) qui passe par A. Comme ABC est rectangle en A, c'est la droite (BC).
   - Comme $s(H) = H$, alors l'image de la droite (HA) passe par H. De plus, l'image de (HA) est perpendiculaire çà (HA) (une démonstration analogue à la précédente permettrait de le justifier). Ainsi, l'image de (HA) est la perpendiculaire à (HA) qui passe par H. Comme (HA) est perpendiculaire à $(HB) = (BC)$ (par définition d'une hauteur), alors l'image de (HA) par s est la droite (BC).
   - Le point A est le point d'intersection entre (AB) et (HA) donc son image $s(A)$ est le point d'intersection des droites images, à savoir (AC) et (BC). Ainsi, $s(A) = C$.
2. Le rapport de la similitude s est $\frac{s(B)s(H)}{BH} = \frac{AH}{BH}$ mais il vaut aussi $\frac{s(A)s(H)}{AH} = \frac{CH}{AH}$. Ainsi, $\frac{AH}{BH} = \frac{CH}{AH}$. Cela implique que $AH \times AH = BH \times CH$ soit $AH^2 = BH \times CH$.

Exercice 13 :

- *Lieu de C*

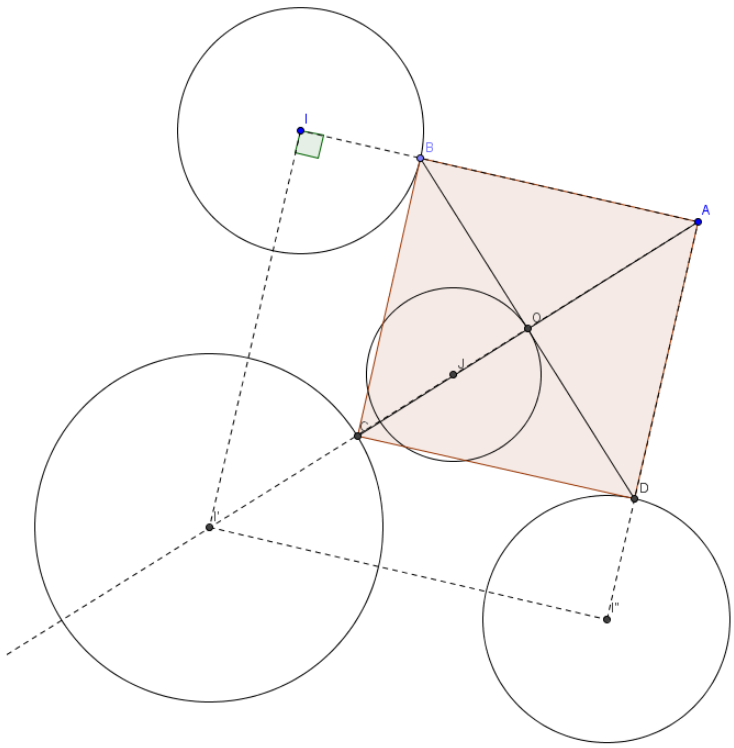
  Comme ABC est un triangle isocèle rectangle en B (car $ABCD$ esr un carré) alors d'après le théorème de Pythagore. $AC^2 = AB^2 + BC^2 = AB^2 + AB^2 = 2AB^2$. Ainsi, $AC = \sqrt{2}\,AB$.
  De plus, $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$. On en déduit que $s(B) = C$ avec s similitude directe de centre A et de rapport $\sqrt{2}$. Lorsque B décrit le cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon r, on en déduit que C décrit le cercle $s(\mathcal{C})$ de centre $s(I) = I'$ et de rayon $\sqrt{2}r$ (*ce cercle est appelé lieu de C*).
- *Lieu de D*

  Comme $ABCD$ est un carré direct, $AD = AB$ et $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Cela signifie que $D = r(B)$ avec r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Le lieu des points D lorsque B décrit le cercle $\mathcal{C}$ est alors le cercle $r(\mathcal{C})$ de centre $r(I) = I''$ et de rayon r (une rotation est une isométrie).

- *Lieu de O*

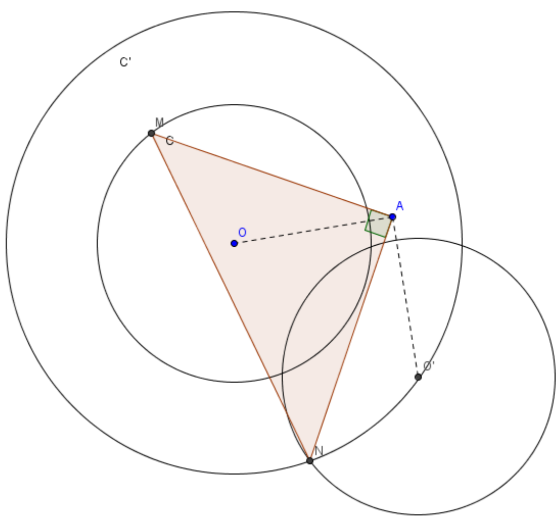
  Les diagonales d'un carré se coupent en leur milieu donc le point O est le milieu de $[AC]$. Autrement dit, $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ce qui s'écrit encore $O = h(C)$ avec h homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$. Comme le point C décrit le cercle $\mathcal{C}'$ de centre I' et de rayon $\sqrt{2}r$ lorsque B décrit $\mathcal{C}$ alors O décrit $h(\mathcal{C}')$ cercle de centre $h(I') = J$ (milieu de $[AI']$) et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}r$.

  `Remarque` : on aurait pu aussi considérer que $O = s'(B)$ avec s' similitude de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

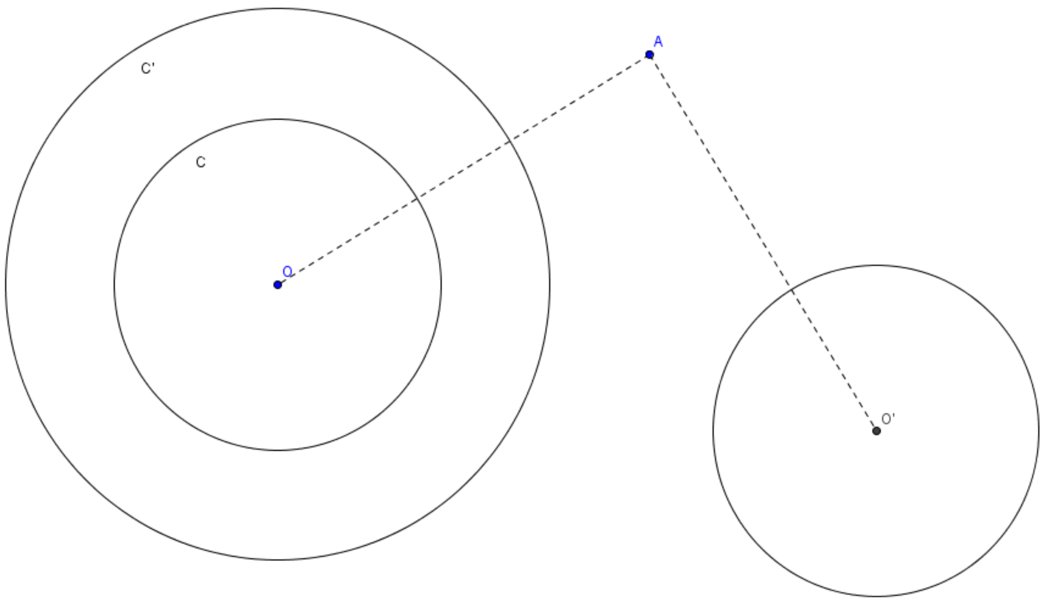


Exercice 14 :

1. On sait déjà que $N \in \mathcal{C}'$. Si le problème est résolu, alors AMN est isocèle rectangle en A donc $AM = AN$ et $\left(\overrightarrow{AM}\,;\,\overrightarrow{AM}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$. Ainsi, $N = r(M)$ où M est une rotation de centre A et d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$. Comme $M \in \mathcal{C}$ alors $N = r(M) \in r(\mathcal{C})$, cercle de centre $r(O) = O'$ et de rayon r où O est le centre de $\mathcal{C}$. Finalement, N est à l'intersection de $\mathcal{C}'$ et de $r(\mathcal{C})$.
2. On construit l'image du cercle $\mathcal{C}$ par la rotation r pour obtenir un point N convenable. On détermine si possible M tel que AMN soit isocèle rectangle à partir de ce point N.



Ce problème n'a pas toujours de solution. Il est par exemple possible que les cercles $\mathcal{C}'$ et $r(\mathcal{C})$ n'aient pas de point d'intersection. C'est en particulier le cas si le point A est éloigné du centre O de $\mathcal{C}$.



Exercice C :

1. (a) Le rapport de la similitude s est $\lambda = \dfrac{AB}{GB}$. Le point G étant centre de gravité de ABC, $BG = \dfrac{2}{3}BI$ où I est le milieu de $[AC]$. On peut calculer BI grâce au théorème de Pythagore dans le triangle ABI rectangle en I (car dans un triangle équilatéral, les médianes sont aussi des hauteurs). Ainsi, $BI^2 = AB^2 - AI^2 = AB^2 - \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 = \dfrac{4AB^2 - AB^2}{4} = \dfrac{3AB^2}{4}$. Ainsi, $AI = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AB$ et $BG = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}AB = \dfrac{\sqrt{3}}{3}AB$. On en déduit que $\lambda = \dfrac{AB}{\frac{\sqrt{3}}{3}AB} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

   L'angle de la similitude est $\theta = (\overrightarrow{BG}\,;\overrightarrow{BA})$. La médiane (BG) étant aussi bissectrice du triangle ABC issue de B, on en déduit que $\theta = \dfrac{(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA})}{2} = \dfrac{\frac{\pi}{3}}{2} = \dfrac{\pi}{6}$.

   (b) Montrons que $s(K) = M$. Comme K est le centre de gravité du triangle BME, on peut utiliser les résultats précédents pour connaitre BK : en faisant des calculs analogues à ceux effectués pour le triangle ABC, on obtiendrait que $BK = \dfrac{\sqrt{3}}{3}BM$ et donc $BM = \sqrt{3}\,BK$.

   De plus, $(\overrightarrow{BK}\,;\overrightarrow{BM}) = \dfrac{(\overrightarrow{BE}\,;\overrightarrow{BM})}{2} = \dfrac{\pi}{6}$. Le point K' image de K par s étant défini par $\begin{cases} BK' = \lambda\, BK = \sqrt{3}\,BK \\ (\overrightarrow{BK}\,;\overrightarrow{BK'}) = \theta = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$, on a bien justifié que $s(K) = M$.

   Comme $s(G) = A$ et $s(K) = M$, alors $\dfrac{AM}{GK} = \lambda = \sqrt{3}$ donc $\dfrac{GK}{AM} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. De plus, $(\overrightarrow{GK}\,;\overrightarrow{AM}) = \theta = \dfrac{\pi}{6}$. Or, $(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{GK}) \equiv -(\overrightarrow{GK}\,;\overrightarrow{AM})\ [2\pi]$ d'où $(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{GK}) \equiv -\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

   (c) Le rapport de la similitude s' est $\lambda' = \dfrac{CG}{CA}$. La longueur CG correspond une fois encore aux deux-tiers de la hauteur du triangle équilatéral ABC donc $CG = \dfrac{\sqrt{3}}{3}CA$ soit $\lambda' = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

   L'angle θ' de la similitude s' est $\theta' = (\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CG}) = \dfrac{(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB})}{2} = \dfrac{\pi}{6}$.
   Montrons que $s'(M) = L$. On utilise les résultats précédents, cette fois-ci dans le triangle CMF équilétéral. Comme L est le centre de gravité de CML, $CL = \dfrac{\sqrt{3}}{3}CM$ donc $\dfrac{CL}{CM} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \lambda'$.

En outre, $(\overrightarrow{CM}\,;\overrightarrow{CL}) = \dfrac{(\overrightarrow{CM}\,;\overrightarrow{CF})}{2} = \dfrac{\pi}{6} = \theta$. Pour ces deux calculs, on retrouve l'angle et le rapport de s' donc $s'(M) = L$.

Vu que $s'(A) = G$ et $s'(M) = L$ alors $\dfrac{GL}{AM} = \lambda' = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{GL}) = \theta' = \dfrac{\pi}{6}$

(d) D'après les questions précédentes, $\dfrac{GK}{AM} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{GL}{AM}$ donc $GK = GL$. De plus, d'après la relation de Chasles, $(\overrightarrow{GK}\,;\overrightarrow{GL}) \equiv (\overrightarrow{GK}\,;\overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{GL})\ [2\pi]$.
On a montré que $(\overrightarrow{GK}\,;\overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{GL}) = \dfrac{\pi}{6}$ donc $(\overrightarrow{GK}\,;\overrightarrow{GL}) \equiv \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$ c'est-à-dire $(\overrightarrow{GK}\,;\overrightarrow{GL}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Le triangle GKL a deux côtés égaux et un angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$, c'est donc un triangle équilatéral.

2. (a) s et s' étant deux similitudes directes, leur composée $s' \circ s$ est encore une similitude directe. Son rapport est $\lambda \times \lambda' = 1$ donc $s' \circ s'$ est bien une isométrie.

   (b) $f(K) = s'(s(K)) = s'(M) = L$ d'après ce qui a été montré dans la question 1.
   $f(G) = s'(s(G)) = s'(A) = G$.

   (c) Comme $f(G) = G$, f est une similitude directe de centre G (f n'est pas l'identité car $f(K) \neq K$), de rapport 1. Son angle est la somme de θ et de θ'. Or, $\theta = \theta' = \dfrac{\pi}{6}$ donc l'angle de f est $\dfrac{\pi}{3}$.
   Finalement, f est la rotation de centre G et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

   (d) Comme $f(K) = L$, alors $GL = GK$ (par définition d'une isométrie) et $(\overrightarrow{GK}\,;\overrightarrow{GL}) = \dfrac{\pi}{3}$. Le triangle GKL est donc équilatéral (même conclusion qu'à la fin du 1).

3. Si M est un point quelconque du plan, la conclusion sera le même (le triangle GKL est équilatéral) car on ne s'est pas du tout servi de l'hypothèse $M \in [BC]$ dans la démonstration.