

CORRECTION DES EXERCICES POUR LE VENDREDI 1^{er} AVRIL

Exercice 7 de la feuille :

1. La forme complexe de S est $z' = ke^{i\alpha}(z - \omega) + \omega = 2e^{-\frac{i\pi}{4}}(z - i) + i$. Ecrivons cette forme complexe sous la forme $z' = az + b$:

$$\begin{aligned} z' &= 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) (z - i) + i = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) (z - i) + i = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})(z - i) + i \\ &= (\sqrt{2} + i\sqrt{2})z - i\sqrt{2} + \sqrt{2} + i = \sqrt{2}(1 + i)z + \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2})i \end{aligned}$$

2. La forme complexe de S est

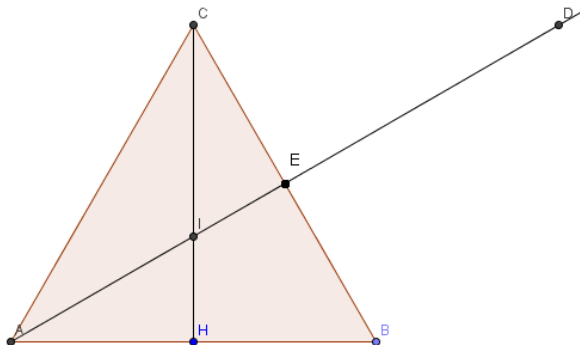
$$z' = ke^{i\alpha}(z - \omega) + \omega = \frac{1}{2}e^{-\frac{i\pi}{2}}[z - (-1 + i)] - 1 + i = -\frac{1}{2}i(z + 1 - i) - 1 + i = -\frac{1}{2}iz - \frac{1}{2}i - \frac{1}{2} - 1 + i = -\frac{1}{2}iz - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$$

3. La symétrie centrale de centre A correspond à une homothétie de centre A et de rapport -1 . Son écriture complexe est donc

$$z' = -1(z - z_A) + z_A = -(z + 2 - i) - 2 + i = -z - 2 + i - 2 + i = -z - 4 + 2i$$

Exercice 20 p.67 :

1.



2. La similitude S a pour rapport $\lambda = \frac{AC}{AD}$. Soit E le milieu de $[AD]$. Comme D est le symétrique de A par rapport à la droite (BC) , alors E est un point de (BC) et $(CE) \perp (BC)$. En particulier, le triangle AEC est rectangle en E . De plus, la droite (AE) est perpendiculaire au côté $[BC]$ du triangle équilatéral ABC donc c'est une hauteur de ce triangle et donc aussi une médiane (propriété des triangles équilatéraux). Ainsi, E est le milieu de $[BC]$.

D'après le théorème de Pythagore, $AE^2 = AC^2 - CE^2 = AC^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2 = \frac{4AC^2 - AC^2}{4} = \frac{3AC^2}{4}$. Ainsi,

$$AE = \frac{\sqrt{3}}{2} AC \text{ et } AD = 2AE = \sqrt{3}AC. \text{ On en déduit que } \lambda = \frac{AC}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

L'angle de la similitude S est $\theta = (\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AC})$. La droite (AD) est la hauteur issue de A du triangle équilatéral ABC , c'est donc aussi la bissectrice issue de A de ABC .

$$\text{Ainsi, } \theta = (\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{6} \text{ (en effet, } ABC \text{ étant équilatéral, } (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}\text{).}$$

3. Comme $S(B) = I$, alors $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AI}) = \theta = \frac{\pi}{6}$. Cela signifie que I est sur la bissectrice du triangle équilatéral

ABC issue de A , donc sur la demi-droite $[AD)$. De plus, $AI = \lambda AB$ soit $AI = \frac{1}{\sqrt{3}} AB$

Soit I un point de $[AD)$ et on note H son projeté orthogonal sur $[AB)$. Alors AIH est un triangle rectangle

en H et on peut utiliser les relations trigonométriques dans un triangle rectangle. Ainsi, $\cos(\widehat{HAI}) = \frac{AH}{AI}$. Or, $\widehat{HAI} = \frac{\pi}{6}$ puisque I a été choisi sur $[AD]$ et $AI = \frac{1}{\sqrt{3}} AB$. Ainsi, $AH = \cos(\frac{\pi}{6}) \times \frac{1}{\sqrt{3}} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} AB = \frac{AB}{2}$. Comme $H \in [AB]$, cela signifie que H est le milieu de $[AB]$. La droite (HI) est perpendiculaire à (AB) (par définition du projeté orthogonal) donc c'est la médiatrice de $[AB]$. Comme ABC est équilatéral, cette médiatrice est aussi la médiane de ABC issue de C . Finalement, I est le point d'intersection de (CH) et de $[AD]$.

Exercice 39 p.69 :

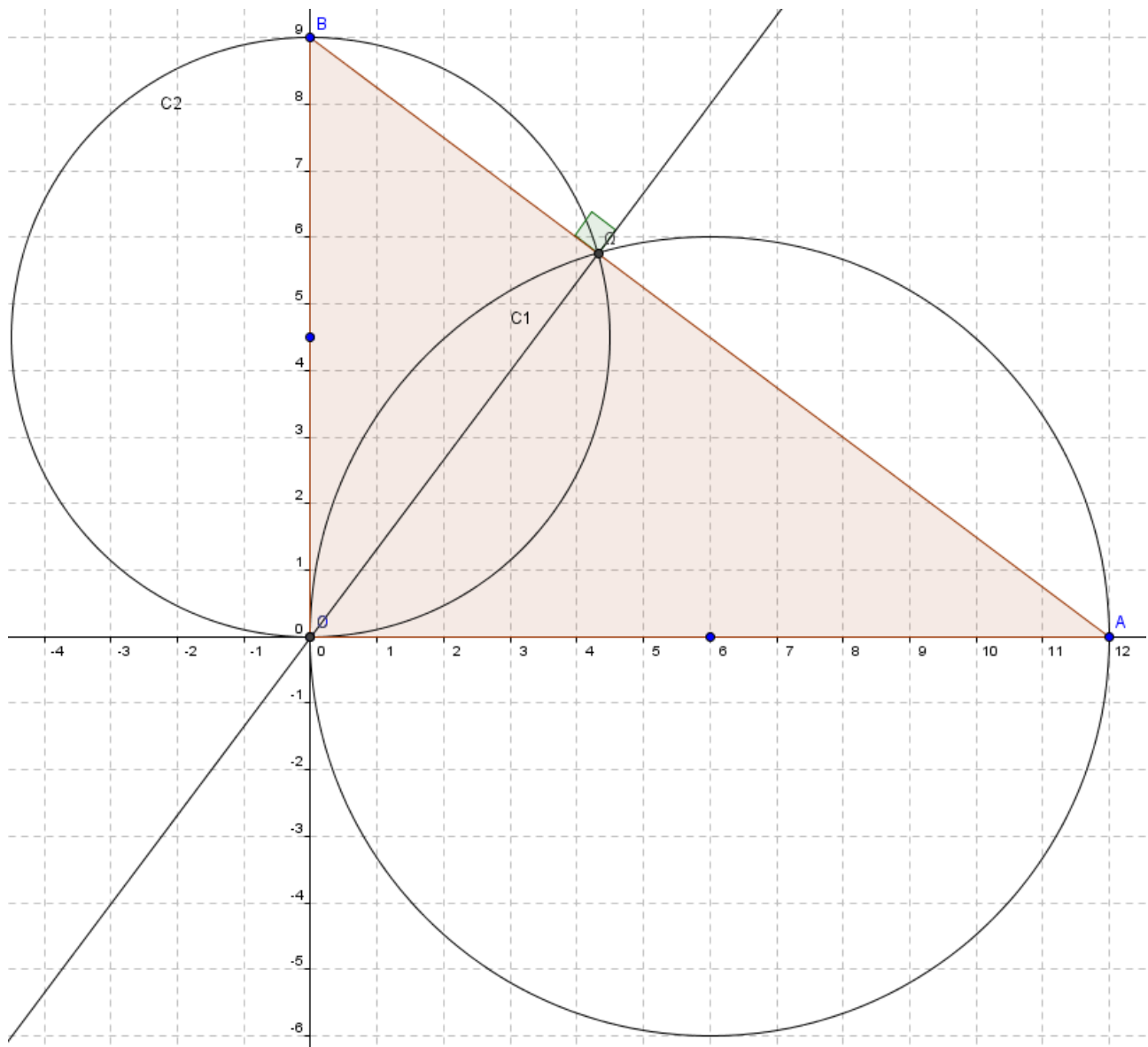
- a) Pour qu'il s'agisse d'une translation, il faut et il suffit que $a = 1$. En effet les translations sont des isométries et l'angle de ces similitudes est nul donc $|a| = 1$ et $\arg(a) \equiv 0 [2\pi]$ d'où $a = e^{i \times 0} = 1$. Dans ce cas l'écriture complexe de S est $z' = z + 2 + i$ et le vecteur $\vec{V}$ de la translation a pour affixe $z_{\vec{V}} = 2 + i$.
- b) Pour qu'il s'agisse d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$, il faut et il suffit que $|a| = 1$ (les rotations sont des isométries) et $\arg(a) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$. Ainsi, $a = e^{i \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- c) Pour qu'il s'agisse d'une homothétie de rapport -3 , il faut et il suffit que $|a| = 3$ et $\arg(a) \equiv \pi [2\pi]$ (l'angle d'une homothétie de rapport négatif vaut π). Ainsi $a = 3e^{i\pi} = -3$. Dans ce cas, si l'écriture complexe est $z' = az + b$, l'affixe du centre est $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{2+i}{1+3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}i$.
- d) Pour qu'il s'agisse d'une similitude de rapport 2 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, il faut et il suffit que $|a| = 2$ et $\arg(a) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$ soit $a = 2e^{i \frac{2\pi}{3}} = 2 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 + i\sqrt{3}$.

Exercice 10 p.66 :

- L'écriture complexe de h est $z = -3(z - z_A) + z_A = -3(z + 4i) - 4i = -3z - 12i - 4i = -3z - 16i$.
L'écriture complexe de r est $z' = e^{i \frac{\pi}{2}}(z - z_B) + z_B = i(z - 1 - 2i) + 1 + 2i = iz - i + 2 + 1 + 2i = iz + 3 + i$.
L'écriture complexe de t est $z' = z + z_{\vec{AB}} = z + z_B - z_A = z + 1 + 2i + 4i = z + 1 + 6i$.
- t est une similitude directe de rapport 1 et d'angle 0 et h est une similitude directe de rapport 3 et d'angle π donc $t \circ h$ est une similitude directe de rapport $3 \times 1 = 3$ et d'angle $0 + \pi = \pi$. De plus, r est une similitude directe de rapport 1 et d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc $r \circ t \circ h$ est une similitude directe de rapport $3 \times 1 = 3$ et d'angle $\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$. Or, $\frac{3\pi}{2} \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ donc $r \circ t \circ h$ est une similitude directe de rapport 3 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. De plus, $r \circ t \circ h(A) = (r \circ t)(h(A)) = (r \circ t)(A) = r(t(A)) = r(B) = B$. L'image de A par $r \circ t \circ h$ est B .
- L'écriture complexe de $t \circ h$ est $z' = z_1 + 1 + 6i$ avec $z_1 = -3z - 16i$.
On obtient donc $z' = -3z - 16i + 1 + 6i = -3z + 1 - 10i$.
L'écriture complexe de $r \circ t \circ h$ est donc $z' = iz_2 + 3 + i$ avec $z_2 = -3z + 1 - 10i$. On obtient : $z' = i(-3z + 1 - 10i) + 3 + i = -3iz + i + 10 + 3 + i = -3iz + 13 + 2i$.
L'angle de la similitude est alors $\theta = \arg(-3i) = -\frac{\pi}{2}$. On retrouve la résultat obtenu à la question d'avant. On peut aussi remarquer que le rapport est $\lambda = |-3i| = 3$, comme prouvé à la question précédente. Néanmoins l'écriture complexe peut apporter un renseignement supplémentaire, elle permet de déterminer le centre de la similitude. En effet, son affixe est

$$\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{13+2i}{1+3i} = \frac{(13+2i)(1-3i)}{1+9} = \frac{13-39i+2i+6}{10} = \frac{19}{10} - \frac{37}{10}i$$

Exercice 44 p.69 :



1. Montrons que f admet le point $\Omega\left(\frac{108}{25}; \frac{144}{25}\right)$ comme point invariant :

$$-\frac{3}{4}iz_{\Omega} + 9i = -\frac{3}{4}i\left(\frac{108}{25} + i\frac{144}{25}\right) + 9i = -\frac{3i \times 27}{25} + \frac{3 \times 36}{25} + 9i = \frac{108}{25} + i\left(\frac{-81 + 225}{25}\right) = \frac{108}{25} + \frac{144}{25}i = z_{\Omega}$$

L'écriture complexe de f est sous la forme $Z = az + b$ avec $a = -\frac{3}{4}i \in \mathbb{C}^*$ et $b = 9i \in \mathbb{C}$ donc f est une similitude directe. Son rapport est $\lambda = |a| = \left|-\frac{3}{4}i\right| = \frac{3}{4}|i| = \frac{3}{4}$. Son angle θ est tel que $\theta \equiv \arg(a) [2\pi]$ soit $\theta \equiv \arg\left(-\frac{3}{4}i\right)$. Or, $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ donc la forme complexe de a est $a = \frac{3}{4}e^{-i\frac{\pi}{2}}$ donc $\theta \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$. Comme $a \neq 1$, il y a un seul point fixe qui correspond au centre de la similitude. Ainsi, f est une similitude directe de centre Ω , de rapport $\frac{3}{4}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

2. $Z_A = -\frac{3}{4}iz_A + 9i = -\frac{3}{4}i \times 12 + 9i = -9i + 9i = 0$. On en déduit que l'image de A par f est le point O .

$Z_O = -\frac{3}{4}iz_0 + 9i = 9i$ car $z_O = 0$. L'image de O par f est B .

Comme $f(\Omega) = \Omega$ et $f(A) = O$, alors $(\overrightarrow{\Omega A}; \overrightarrow{\Omega O}) = (\overrightarrow{\Omega A}; \overrightarrow{f(\Omega)f(A)})$ est l'angle de la similitude (par définition). Ainsi, $(\overrightarrow{\Omega A}; \overrightarrow{\Omega O}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$. En particulier, le triangle $A\Omega O$ est rectangle en Ω , ce qui signifie que Ω est sur le cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre $[OA]$.

De même, $f(O) = B$ donc $(\overrightarrow{\Omega O}; \overrightarrow{\Omega B}) = (\overrightarrow{\Omega O}; \overrightarrow{f(\Omega)f(O)}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$. Le triangle $O\Omega B$ est rectangle en Ω donc Ω est sur le cercle $\mathcal{C}_2$ de diamètre $[OB]$.

$(\overrightarrow{\Omega A}; \overrightarrow{\Omega B}) \equiv (\overrightarrow{\Omega A}; \overrightarrow{\Omega O}) + (\overrightarrow{\Omega O}; \overrightarrow{\Omega B}) [2\pi]$ d'après la relation de Chasles. Or, $(\overrightarrow{\Omega A}; \overrightarrow{\Omega O}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $(\overrightarrow{\Omega O}; \overrightarrow{\Omega B}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ d'après ce qui a été montré avant.

Ainsi, $(\overrightarrow{\Omega A}; \overrightarrow{\Omega B}) \equiv -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} [2\pi]$ soit $(\overrightarrow{\Omega A}; \overrightarrow{\Omega B}) \equiv -\pi [2\pi]$. Cela signifie que $\Omega \in [AB]$. On a montré plus haut que $(\overrightarrow{\Omega O}; \overrightarrow{\Omega B}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ donc les droites (ΩO) et $(\Omega B) = (AB)$ sont perpendiculaires. La droite $(O\Omega)$ coupe (AB) en Ω selon un angle droit donc c'est une hauteur du triangle AOB . Vu que $\Omega \in [AB]$, c'est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle AOB .

Le rapport λ de la similitude f correspond à $\frac{f(\Omega)f(O)}{\Omega O} = \frac{\Omega B}{\Omega O}$ mais aussi à $\frac{f(\Omega)f(A)}{\Omega A} = \frac{\Omega O}{\Omega A}$. Ainsi, $\lambda = \frac{\Omega B}{\Omega O} = \frac{\Omega O}{\Omega A}$, ce qui implique : $\Omega A \times \Omega B = \Omega O^2$