Lycée J.P Vernant — Année scolaire 2010-2011
spéTS — Mathématiques

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLE N° 6

Seul l'exercice 1 comporte des différences entre les sujets (a) et (b)

SUJET (a)

Exercice 1 :

PARTIE A

1. (a) L'équation du cylindre $\mathcal{C}$ d'axe (Oy) de rayon r est $x^2+z^2=r^2$.

   (b) On résout le système $\begin{cases} x^2+z^2=r^2 \\ x=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2=r^2-a^2 \\ x=a \end{cases}$

   - Si $r^2-a^2<0$, c'est-à-dire si $r<|a|$ alors l'équation $z^2=r^2-a^2$ n'a pas de solution car un carré est toujours positif. La section du plan d'équation $x=a$ avec le cylindre $\mathcal{C}$ est vide dans ce cas.
   - Si $r^2-a^2=0$, c'est-à-dire si $r=|a|$, alors le système équivaut à $\begin{cases} z^2=0 \\ x=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a \\ y=t \\ z=0 \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

     La section est la droite passant par $A\,(a\,;0\,;0)$ et de vecteur directeur $\vec{V}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.
   - Si $r^2-a^2>0$, c'est-à-dire si $r>|a|$, alors le système équivaut à

     $$\begin{cases} z=\pm\sqrt{r^2-a^2} \\ x=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a \\ y=t \\ z=\sqrt{r^2-a^2} \end{cases}, t\in\mathbb{R} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x=a \\ y=t' \\ z=-\sqrt{r^2-a^2} \end{cases}, t'\in\mathbb{R}$$

     La section est la réunion de deux droites de même vecteur directeur $\vec{V}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. et passant respectivement par les points $A_1\left(a\,;0\,;\sqrt{r^2-a^2}\right)$ et $A_2\left(a\,;0\,;-\sqrt{r^2-a^2}\right)$.

2. (a) L'équation de $\mathcal{C}'$ est du type $x^2+z^2=r'^2$. Pour déterminer l'intersection avec la droite d'équation $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, on résout $\begin{cases} x^2+z^2=r'^2 \\ x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$. En remplaçant x par $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dans la première équation, cela donne $\dfrac{3}{4}+z^2=r'^2$. On sait que le point $A\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,;0\,;\dfrac{3}{2}\right)$ vérifie cette équation donc $\dfrac{3}{4}+\dfrac{9}{4}=r'^2$ soit $r'^2=\dfrac{12}{4}=3$. L'équation du cylindre $\mathcal{C}'$ est donc $x^2+z^2=3$.

   (b) Les droites qui composent cette intersection ont pour vecteur directeur $\vec{V}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ d'après la démonstration précédente. Les équations paramétriques des droites de l'intersection sont :

   $$\begin{cases} x=-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y=t \\ z=\frac{3}{2} \end{cases}, t\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x=-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y=t \\ z=-\frac{3}{2} \end{cases}, t\in\mathbb{R}$$

   (c) Les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}'$ avec le plan d'équation $y=-10000$ sont les solutions du système $\begin{cases} x^2+z^2=3 \\ y=-10000 \end{cases}$. Il s'agit de l'équation du cercle de centre $C\,(0\,;-10000\,;0)$ et de rayon $\sqrt{3}$ inclus dans le plan d'équation $y=-10000$.

PARTIE B

1. – On remplace les coordonnées de C dans l'équation $x^2 + y^2 = z^2$.
   $x_C^2 + y_C^2 = 1 + 4 = 5$ et $z_C^2 = -(\sqrt{3})^2 = 3$. Comme $x_C^2 + y_C^2 \neq (z_C)^2$ alors $C \notin \mathcal{S}_1$.
   – L'équation d'un cylindre d'axe (Oz) est du type $x^2 + y^2 = r^2$ avec r fixé. $\mathcal{S}_1$ n'est donc pas un cylindre d'axe (Oz).
   – La droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ a pour équation paramétrique $\begin{cases} x = 3t \\ y = 4t \\ z = 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. Pour savoir si $\mathcal{S}_1$ contient cette droite, on remplace dans l'équation de $\mathcal{S}_1$ les expressions de x, y et z en fonction de t.
   Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 = (3t)^2 + (4t)^2 = 9t^2 + 16t^2 = 25t^2 = (5t)^2 = z^2$. On en déduit que la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{u}$ est incluse dans la surface $\mathcal{S}_1$.
   – Pour déterminer la section de $\mathcal{S}_1$ avec le plan d'équation $y = 1$, on résout le système $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 - x^2 = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (z-x)(z+x) = 1 \\ y = 1 \end{cases}$. Il s'agit d'une équation d'hyperbole et non de droite.

   La bonne réponse est la **réponse c**

2. L'équation de $\mathcal{S}_2$ est

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 2y + z + 3 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + (y-1)^2 - 1 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 + (y-1)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = -3 + 1 + \frac{1}{4} = -\frac{7}{4} \end{aligned}$$

   Comme une somme de carrés est toujours positif, alors cette équation n'a pas de solution donc $\mathcal{S}_2$ est l'ensemble vide. En particulier, $\mathcal{S}_2$ a une intersection vide avec le plan d'équation $x - y = 0$ (car $\mathcal{S}_2$ est vide), ce n'est pas une sphère ni un cône et son intersection avec le plan d'équation (yOz) n'est pas un cercle.
   La bonne réponse est la **réponse a**

3. – Pour que $\mathcal{S}_3$ soit un cône de demi-angle au sommet $\frac{\pi}{4}$, il faudrait ajouter un carré au x. En effet, $y^2 + z^2 = x^2 \Leftrightarrow y^2 + z^2 = \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) x^2$ est l'équation du cône d'axe (Ox) et de demi-angle au sommet $\frac{\pi}{4}$.
   – Le plan d'équation $z = 4$ coupe la surface $\mathcal{S}_3$ car, par exemple, le point $A\,(16\,;\,0\,;\,4)$ appartient à $\mathcal{S}_3$ et au plan d'équation $z = 4$.
   – Si $a < 0$, le plan d'équation $x = a$ ne coupe pas $\mathcal{S}_3$. En effet, l'équation $y^2 + z^2 = a$ n'admet alors pas de solution puisqu'une somme de deux carrés est un nombre positif.
   – On remplace dans l'équation de $\mathcal{S}_3$ les coordonnées x, y et z par leur expression en fonction de t : $t^2 + (-t)^2 = 8 \Leftrightarrow 2t^2 = 8 \Leftrightarrow t^2 = 4 \Leftrightarrow t = 2$ ou $t = -2$. On obtient ainsi deux points d'intersection : $A\,(8\,;\,2\,;\,-2)$ et $B\,(8\,;\,-2\,;\,2)$.

   La bonne réponse est la **réponse d**.

PARTIE C

1. La droite $\mathcal{D}$ a pour équation paramétrique $\begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = 3 \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

2. On sait que $S \in \Delta$ et comme Δ est parallèle à (Oz) et passe par $B\,(-1\,;\,3\,;\,0)$ alors $S\,(x_B\,;\,y_B\,;\,z_S)$ soit $S\,(-1\,;\,3\,;\,z_S)$. De plus, $S \in \mathcal{D}$, génératrice du cône donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x_S = 7 + 2t$ et $z_S = -t$. On sait que $x_S = -1$ d'où $-1 = 7 + 2t \Leftrightarrow 2t = -8 \Leftrightarrow t = -4$ et $z_S = -t = 4$. Ainsi, $S\,(-1\,;\,3\,;\,4)$.

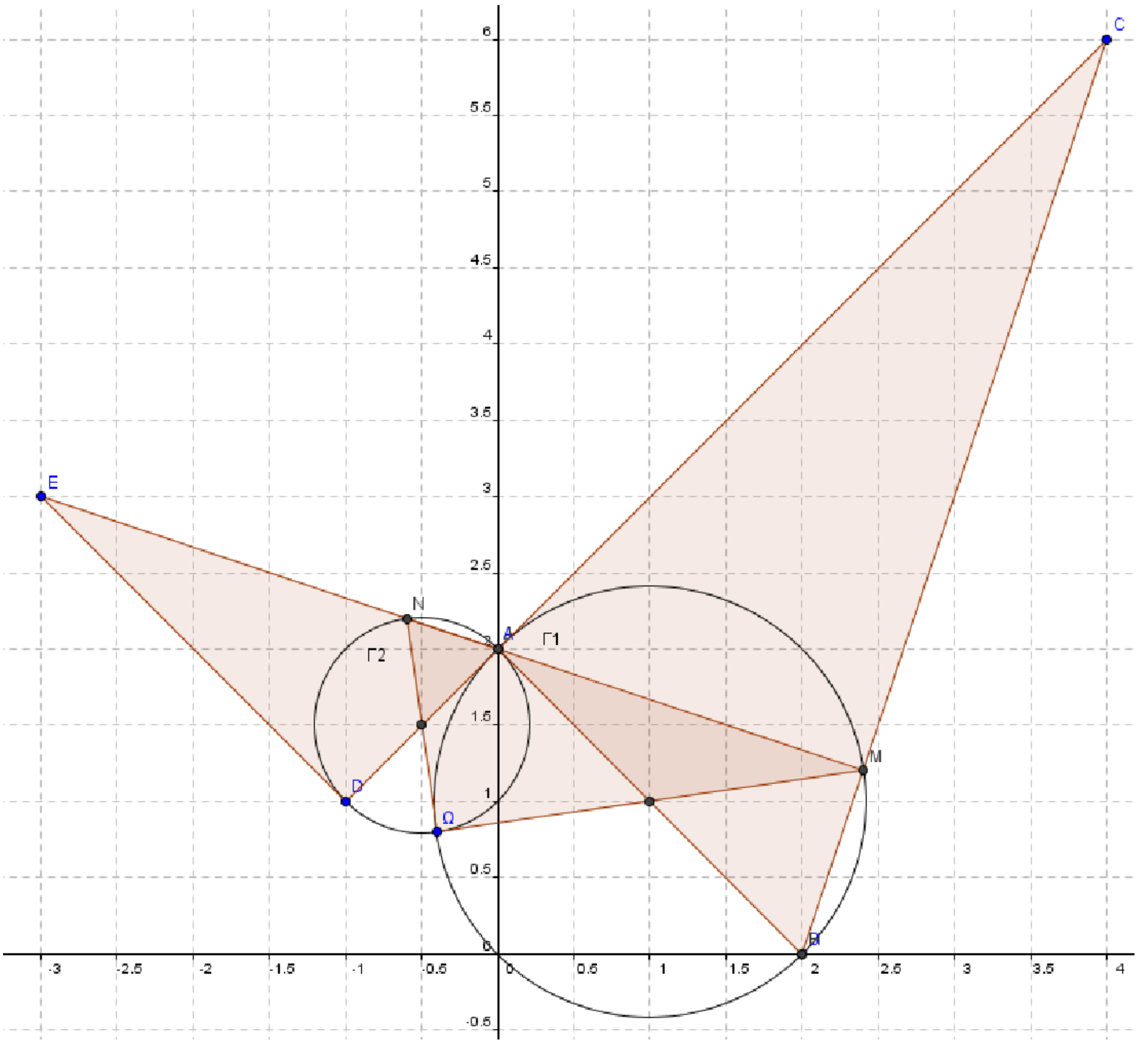
3. L'équation du cône $\mathcal{C}$ est du type $(x-x_S)^2+(y-y_S)^2=k^2(z-z_S)^2$ car l'axe de ce cône est parallèle à (Oz), c'est-à-dire $(x+1)^2+(y-3)^2=k^2(z-4)^2$. Comme la droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le cône , tout point de $\mathcal{D}$ est dans le cône, par exemple $A\,(7\,;\,3\,;\,0)\in\mathcal{C}$. On en déduit que $(7+1)^2+(3-3)^2=k^2(0-4)^2$ soit $64=16k^2$ et donc $k^2=\dfrac{64}{16}=4$. L'équation de $\mathcal{C}$ est $(x+1)^2+(y-3)^2=4(z-4)^2$.

4. (a) On résout $\begin{cases}(x+1)^2+(y-3)^2=4(z-4)^2\\ z=a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+1)^2+(y-3)^2=4(a-4)^2\\ z=a\end{cases}$. On obtient l'équation du cercle de centre $I\,(-1\,;\,3\,;\,a)$ et de rayon $r=\sqrt{4(a-4)^2}=2|a-4|$ inclus dans le plan d'équation $z=a$. Comme $0\leqslant a\leqslant 2$ alors $a-4\leqslant -2<0$ donc le rayon du cercle est $r=2(4-a)$.

   (b) La section sera réduite à un point si et seulement si l'équation $(x+1)^2+(y-3)^2=4(a-4)^2$ n'admet qu'une solution. C'est le cas seulement pour a tel que $4(a-4)^2=0\ \leftrightarrow\ a-4=0\ \Leftrightarrow\ a=4$. On obtient alors $\begin{cases}(x+1)^2+(y-3)^2=0\\ z=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=0\\ y-3=0\\ z=4\end{cases}$ soit le point $I\,(-1\,;\,3\,;\,4)$.

<u>Exercice 2</u> :

1.



2. $AB=|z_B-z_A|=|2-2i|=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$.
   $AC=|z_C-z_A|=|4+6i-2i|=|4+4i|=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}$.
   Le triangle ABC n'est donc pas isocèle en A.
   De plus $\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)\equiv\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\ [2\pi]$.
   Or, $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\dfrac{4+4i}{2-2i}=\dfrac{2+2i}{1-i}=\dfrac{2(1+i)(1+i)}{1+1}=1-2i-1=2i$ et $\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\arg(2i)\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ puisque $2i$ est un imaginaire pur dont la partie imaginaire est positive.
   On en déduit que $\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, c'est-à-dire que ABC est rectangle en A. N'étant pas isocèle

en A, ABC n'est pas isocèle.

3. (a) Comme f est une similitude directe, son écriture complexe est de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. $f(A) = D \Leftrightarrow z_D = az_A + b$ et $f(B) = A \Leftrightarrow z_A = az_B + b$. On résout donc le système

$$\begin{cases} -1+i = 2ai + b \\ 2i = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2i - 2a \\ -1+i = 2ai + 2i - 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2i - 2a \\ 2a(-1+i) = -1-i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2i - 2a \\ a = -\dfrac{1+i}{2(-1+i)} = -\dfrac{(1+i)(-1-i)}{2(1+1)} = \dfrac{(1+i)^2}{4} = \dfrac{1+2i-1}{4} = \dfrac{i}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{i}{2} \\ b = 2i - 2 \times \dfrac{i}{2} = i \end{cases}$$

La forme complexe de f est donc $z' = \dfrac{i}{2}z + i$.

(b) L'angle de f est $\arg(a) = \arg\left(\dfrac{i}{2}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ car $\dfrac{i}{2}$ est un nombre imaginaire pur de partie imaginaire strictement positive.
Le rapport de f est $|a| = \left|\dfrac{i}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$.
Le centre Ω de f a pour affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{i}{1-\frac{i}{2}} = \dfrac{2i}{2-i} = \dfrac{2i(2+i)}{4+1} = \dfrac{4i-2}{5} = -\dfrac{2}{5} + \dfrac{4}{5}i$.

(c) On sait déjà que $f(A) = D$, $f(B) = A$ donc il suffit de justifier que $f(C) = E$ pour conclure que le triangle ABC a pour image le triangle DAE par f (puisque l'image d'un segment est un segment). Or, $z'_C = \dfrac{i}{2}z_C + i = \dfrac{i}{2}(4+6i) + i = 2i - 3 + i = -3 + 3i = z_E$ d'où $f(C) = E$.

(d) Comme une similitude conserve les angles géométriques et que ABC est rectangle en A (question 2) alors DAE est rectangle en $f(A) = D$.

4. (a) $M \in (BC)$ donc $f(M)$ est sur l'image de (BC), c'est-à-dire (AE) puisque l'image d'une droite est une droite. De plus, $M \in (\Gamma_1)$ donc $f(M)$ est sur l'image de (Γ_1). Comme (Γ_1) est le cercle de diamètre $[AB]$, alors son image est le cercle de diamètre $[f(A)f(B)] = [AD]$, c'est donc le cercle (Γ_2). Le point $f(M)$ est alors un point d'intersection de (Γ_2) et de la droite (AE). Il y a deux tels points d'intersection : N et A. Comme $M \neq B$, alors $f(M) \neq A$ (par définition d'une transformation). Ainsi, $f(M) = N$.

(b) Ω est le centre de la similitude f et $f(M) = N$ donc $(\Omega M\,;\,\Omega N) = (\Omega M\,;\,f(\Omega)f(M))$ est l'angle de la similitude f. Ainsi, $(\Omega M\,;\,\Omega N) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On en déduit que ΩMN est rectangle en Ω. De plus, $\Omega N = f(\Omega)f(M) = \dfrac{1}{2}\Omega N$ puisque f est de rapport $\dfrac{1}{2}$. Cela implique que ΩMN n'est pas isocèle.

(c) Par définition du rapport λ de la similitude f, $\dfrac{NE}{MC} = \dfrac{f(M)f(C)}{MC} = \lambda$ et $\dfrac{NA}{MB} = \dfrac{f(M)f(B)}{MB} = \lambda$.
Ainsi, $\dfrac{NE}{MC} = \dfrac{NA}{MB}$ d'où $MB \times NE = MC \times NA$.

Exercice 3 :

PARTIE A

1. Si $(x\,;\,y)$ est solution de $3y = 5(15 - x)$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, alors 3 divise $5(15 - x)$ puisque $y \in \mathbb{Z}$. On sait que 3 et 5 sont des nombres premiers distincts donc ils sont premiers entre eux. D'après le théorème de Gauss, on en déduit que 3 divise $15 - x$, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $15 - x = 3k \Leftrightarrow x = 15 - 3k$. En remplaçant $15 - x$ par $3k$ dans l'équation initiale, on obtient : $3y = 15k$ soit $y = 5k$. On a ainsi prouvé que si $(x\,;\,y)$ est solution de (E) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(x\,;\,y) = (15 - 3k\,;\,5k)$.
Réciproquement, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $3 \times 5k = 15k$ et $5\,(15 - (15 - 3k)) = 5 \times 3k = 15k$ donc les couples

$(15-3k\,;\,5k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ sont solutions de (E).
Finalement, l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ est $\mathcal{S} = \{(15-3k\,;\,5k)\,;\,k\in\mathbb{Z}\}$

2. La distance sur le cercle trigonométrique correspondant à deux fois et demie la circonférence du cercle est $2,5\times 2\pi = \dfrac{5}{2}\times 2\pi = 5\pi$. La distance d parcourue par le point A après avoir subi p rotations r_1 et q rotations r_2 est $p\times\dfrac{\pi}{3}+q\times\dfrac{\pi}{5}$. On cherche donc les couples $(p\,;\,q)\in\mathbb{N}^2$ tels que $p\times\dfrac{\pi}{3}+q\times\dfrac{\pi}{5}=5\pi$. En multipliant par $\dfrac{15}{\pi}$, cette équation équivaut donc à $5p+3q=5\times 15 \Leftrightarrow 3q = 5(15-p)$. On retrouve l'équation (E). Les couples $(p\,;\,q)$ s'écrivent donc sous la forme $(15-3k\,;\,5k)$ avec $k\in\mathbb{Z}$. Comme $q\in\mathbb{N}$, alors $5k\geqslant 0$ soit $k\geqslant 0$. De même, $15-3k\geqslant 0$ puisque $p\in\mathbb{N}$. On en déduit que $15\geqslant 3k$ et donc $k\leqslant 5$. Comme $k\in[0\,;\,5]$ et que $k\in\mathbb{Z}$, il y a 6 couples possibles :

- pour $k=0$, on obtient le couple $(15\,;\,0)$
- pour $k=1$, on obtient le couple $(12\,;\,5)$.
- pour $k=2$, on obtient le couple $(9\,;\,10)$
- pour $k=3$, on obtient le couple $(6\,;\,15)$
- pour $k=4$, on obtient le couple $(3\,;\,20)$
- pour $k=5$, on obtient le couple $(0\,;\,25)$.

PARTIE B

1. • La rotation r_1 est une similitude directe de centre O, de rapport 1 et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. L'homothétie h_1 est une similitude directe de centre O, de rapport 4 et d'angle 0. Comme $s_1 = r_1\circ h_1$ est la composée de deux similitudes directes de centre O, alors s_1 est une similitude directe de centre O. Le rapport de cette similitude est le produit des rapports de r_1 et h_1, c'est-à-dire $\lambda_1 = 1\times 4 = 4$. L'angle de cette similitude est la somme des angles de r_1 et h_1, c'est-à-dire $\theta_1 = \dfrac{\pi}{3}+0=\dfrac{\pi}{3}$.

   • La rotation r_2 est une similitude directe de centre O, de rapport 1 et d'angle $\dfrac{\pi}{5}$. L'homothétie h_2 est une similitude directe de centre O, de rapport $|\text{-}6|=6$ et d'angle π (car le rapport de l'homothétie est négatif). Comme $s_2 = r_2\circ h_2$ est la composée de deux similitudes directes de centre O, alors s_2 est une similitude directe de centre O. Le rapport de cette similitude est le produit des rapports de r_2 et h_2, c'est-à-dire $\lambda_2 = 1\times 6 = 6$. L'angle de cette similitude est la somme des angles de r_2 et h_2, c'est-à-dire $\theta_2 = \dfrac{\pi}{5}+\pi = \dfrac{6\pi}{5}$ (angle qui est aussi égal à $-\dfrac{4\pi}{5}$ modulo 2π)

2. (a) $S_m = \underbrace{s_1\circ s_1\circ\cdots\circ s_1}_{m\text{ fois}}$ est la composée de m similitudes directes de centre O donc c'est une similitude directe de centre O. Son rapport est $\lambda_m = \underbrace{\lambda_1\times\lambda_1\times\cdots\times\lambda_1}_{m\text{ fois}} = (\lambda_1)^m = 4^m$. Son angle est

   $\theta_m = \underbrace{\theta_1+\theta_1\times\cdots\times\theta_1}_{m\text{ fois}} = m\dfrac{\pi}{3}$

   $S'_n = \underbrace{s_2\circ s_2\circ\cdots\circ s_2}_{n\text{ fois}}$ est la composée de n similitudes directes de centre O donc c'est une similitude directe de centre O. Son rapport est $\lambda'_n = \underbrace{\lambda_2\times\lambda_2\times\cdots\times\lambda_2}_{n\text{ fois}} = (\lambda_2)^n = 6^n$. Son angle est

   $\theta'_n = \underbrace{\theta_2+\theta_2\times\cdots\times\theta_2}_{n\text{ fois}} = n\dfrac{6\pi}{5}$

   $f = S'_n\times S_m$ est une similitude directe de centre O comme composée de deux similitudes directes de centre O. Son rapport est $\lambda'_n\times\lambda_m = 6^n\times 4^m = (2\times 3)^n\times(2^2)^m = 2^n\times 3^n\times 2^{2m} = 2^{2m+n}\times 3^n$. Son angle est $\theta'_n+\theta_m = m\dfrac{\pi}{3}+n\dfrac{6\pi}{5}$.

   (b) Si f est une homothétie de rapport $144 = 12^2 = (2^2\times 3)^2 = 2^4\times 3^2$, alors $2^{2m+n}\times 3^n = 2^4\times 3^2$. Par unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers, $n=2$ et $2m+n=4$ donc $2m = 4-2 = 2$ et $m=1$.
   Dans ce cas, l'angle de la similitude est $m\dfrac{\pi}{3}+n\dfrac{6\pi}{5} = \dfrac{\pi}{3}+2\times\dfrac{6\pi}{5} = \dfrac{\pi}{3}+\dfrac{12\pi}{5} = \dfrac{5\pi+36\pi}{15} = \dfrac{41\pi}{15}$.
   Or, $\dfrac{41\pi}{15} = \dfrac{30\pi+11\pi}{15} = 2\pi+\dfrac{11\pi}{15}$. Comme $\dfrac{41\pi}{15}\equiv\dfrac{11\pi}{15}\ [2\pi]$. Comme cet angle n'est pas congru

à 0 ou π modulo 2π, alors la similitude f ne peut pas être une homothétie. Finalement, f ne peut pas être une homothétie de rapport 144.

(c) Par définition d'une similitude de rapport $\lambda = 2^{2m+n} \times 3^n$,

$$OM' = f(O)f(M) = \lambda OM = \lambda|z_M| = \lambda \times |6| = 2 \times 3 \times 2^{2m+n} \times 3^n = 2^{2m+n+1} \times 3^{n+1}$$

Pour avoir $OM' = 240 = 24 \times 10 = 2^3 \times 3 \times 2 \times 5 = 2^4 \times 3 \times 5$, il faut et il suffit que :

$$2^{2m+n+1} \times 3^{n+1} = 2^4 \times 3 \times 5$$

Comme 5 n'est pas un diviseur de $2^{2m+n+1} \times 3^{n+1}$ et il n'existe pas de point M tel que $OM' = 240$.

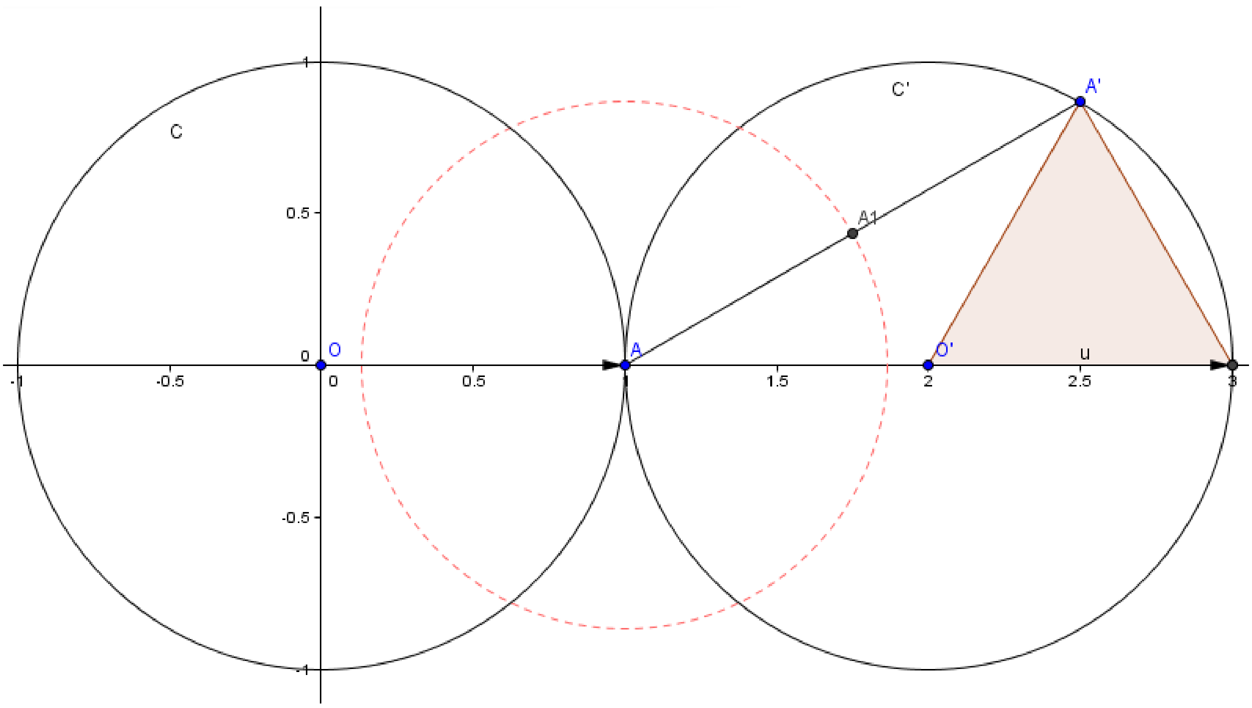
Pour trouver M tel que $Om' = 576 = 4 \times 144 = 4 \times 2^4 \times 3^2 = 2^6 \times 3^2$, il faut résoudre $2^{2m+n+1} \times 3^{n+1} = 2^6 \times 3^2$. Par unicité de la décomposition en facteurs premiers :

$$\begin{cases} 2m+n+1 = 6 \\ n+1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ 2m = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

L'unique couple tel que $OM' = 576$ est $(2\,;1)$.
Comme $z_M = 6$, alors $\overrightarrow{OM'} = 6\vec{u}$ donc $\overrightarrow{OM'}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires de même sens.
Ainsi, $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OM}\,,\overrightarrow{OM'}\right)$ $[2\pi]$. Ce dernier angle correspond à l'angle de la similitude f de centre O. Ainsi, $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM'}\right) \equiv m\dfrac{\pi}{3} + 6\dfrac{n\pi}{5}$ $[2\pi]$ avec $m = 2$ et $n = 1$. Par conséquent, $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM'}\right) \equiv \dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{6\pi}{5}$ $[2\pi]$. Comme $\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{6\pi}{5} = \dfrac{10\pi + 18\pi}{15} = \dfrac{28\pi}{15} \equiv \dfrac{28\pi - 30\pi}{15}$ $[2\pi]$, alors $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM'}\right) \equiv -\dfrac{2\pi}{15}$ $[2\pi]$. Le mesure principale de $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM'}\right)$ est $-\dfrac{2\pi}{15}$.

Exercice 4 :

1. (a)



(b) $\left|\dfrac{z'-2}{z}\right| = \left|\dfrac{z_{M'} - z_{O'}}{z_M - z_O}\right| = \dfrac{|z_{M'} - z_{O'}|}{|z_M - z_O|} = \dfrac{O'M'}{OM}$. Comme $M' \in \mathcal{C}'$, cercle de centre O' et de rayon 1, alors $O'M' = 1$. De plus, M est sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 d'où $OM' = 1$. Ainsi, $\left|\dfrac{z'-2}{z}\right| = \dfrac{1}{1} = 1$.

$$\arg\left(\frac{z'-2}{z}\right) = \arg\left(\frac{z_{M'} - z_{O'}}{z_M - z_O}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{O'M'}\right) \ [2\pi].$$

Par définition de M', $\left(\overrightarrow{OM}\,;\,\overrightarrow{O'M'}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ d'où $\arg\left(\frac{z'-2}{z}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Le nombre complexe de module 1 et de rayon $\frac{\pi}{3}$ est $e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $\frac{z'-2}{z} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et donc $z'-2 = e^{i\frac{\pi}{3}}z$, c'est-à-dire $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z+2$.

(c) La forme complexe de r est du type $z' = az+b$ avec $a = e^{i\frac{\pi}{3}} \in \mathbb{C}^*$ et $b = 2 \in \mathbb{C}$. La transformation r est alors une similitude directe de rapport $|a| = \left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 1$ et d'angle $\arg(a) = \arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Son centre a pour affixe

$$\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{2}{1-\left(\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3})\right)} = \frac{2}{1-\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{4}{1-i\sqrt{3}} = \frac{4(1+i\sqrt{3}}{1+3} = 1+i\sqrt{3}$$

2. Si M_1 est le milieu de $[MM']$ alors $z_{M_1} = \frac{z_M+z_{M'}}{2} = \frac{z+e^{i\frac{\pi}{3}}z+2}{2} = \frac{1+e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}z+1$.

Or, $1+e^{i\frac{\pi}{3}} = 1+\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3}) = 1+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Finalement, $z_{M_1} = \left(\frac{3}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z+1$.

On en déduit que $M_1 = s(M)$ avec s la similitude d'écriture complexe $z' = a'z+b'$ en choisissant $a = \frac{3}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}$ et $b = 1$. Le lieu géométrique du point M_1 lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}$ est $s(\mathcal{C})$, cercle de centre $s(O)$ et de rayon λr avec λ rapport de la similitude s et r le rayon du cercle $\mathcal{C}$ (donc $r=1$). L'affixe de $s(O)$ est $z = b = 1 = z_A$ donc $s(O) = A$. Le rapport de s est

$$\lambda = |a'| = \left|\frac{3}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16}+\frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{12}{16}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Le lieu géométrique cherché est le cercle de centre A et de rayon $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Pour tracer ce cercle, on peut remarquer qu'il doit passer par A_1 milieu de $[AA']$.

SUJET (b)

Exercice 1 :

PARTIE A

1. (a) L'équation du cylindre $\mathcal{C}$ d'axe (Ox) de rayon r est $y^2+z^2=r^2$.

   (b) On résout le système $\left\{\begin{array}{l} y^2+z^2=r^2 \\ y=b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z^2=r^2-b^2 \\ x=a \end{array}\right.$

   - Si $r^2-b^2<0$, c'est-à-dire si $r<|b|$ alors l'équation $z^2=r^2-b^2$ n'a pas de solution car un carré est toujours positif. La section du plan d'équation $y=b$ avec le cylindre $\mathcal{C}$ est vide dans ce cas.
   - Si $r^2-b^2=0$, c'est-à-dire si $r=|b|$, alors le système équivaut à $\left\{\begin{array}{l} z^2=0 \\ y=b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=b \\ z=0 \end{array}\right., t\in\mathbb{R}$.

     La section est la droite passant par $A\,(0\,;\,b\,;\,0)$ et de vecteur directeur $\vec{V}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.
   - Si $r^2-b^2>0$, c'est-à-dire si $r>|b|$, alors le système équivaut à

     $$\left\{\begin{array}{l} z=\pm\sqrt{r^2-b^2} \\ y=b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=b \\ z=\sqrt{r^2-b^2} \end{array}\right., t\in\mathbb{R} \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} x=t' \\ y=b \\ z-\sqrt{r^2-a^2} \end{array}\right., t'\in\mathbb{R}$$

     La section est la réunion de deux droites de même vecteur directeur $\vec{V}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. et passant respectivement par les points $A_1\left(0\,;\,b\,;\,\sqrt{r^2-b^2}\right)$ et $A_2\left(0\,;\,b\,;\,-\sqrt{r^2-b^2}\right)$.

2. (a) L'équation de $\mathcal{C}'$ est du type $y^2+z^2=r'^2$. Pour déterminer l'intersection avec la droite d'équation $x=-\dfrac{\sqrt{11}}{2}$, on résout $\left\{\begin{array}{l} y^2+z^2=r'^2 \\ y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$. En remplaçant y par $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dans la première équation, cela donne $\dfrac{11}{4}+z^2=r'^2$. On sait que le point $A\left(0\,;\,-\dfrac{\sqrt{11}}{2}\,;\,\dfrac{3}{2}\right)$ vérifie cette équation donc $\dfrac{11}{4}+\dfrac{9}{4}=r'^2$ soit $r'^2=\dfrac{20}{4}=5$. L'équation du cylindre $\mathcal{C}'$ est donc $y^2+z^2=5$.

   (b) Les droites qui composent cette intersection ont pour vecteur directeur $\vec{V}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ d'après la démonstration précédente. Les équations paramétriques des droites de l'intersection sont :

   $$\left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=-\frac{\sqrt{11}}{2} \\ z=\frac{3}{2} \end{array}\right., t\in\mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=-\frac{\sqrt{11}}{2} \\ z=-\frac{3}{2} \end{array}\right., t\in\mathbb{R}$$

   (c) Les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}'$ avec le plan d'équation $x=-500000$ sont les solutions du système $\left\{\begin{array}{l} y^2+z^2=5 \\ x=-500000 \end{array}\right.$. Il s'agit de l'équation du cercle de centre $C\,(-500000;\,0\,;\,0)$ et de rayon $\sqrt{5}$ inclus dans le plan d'équation $x=-500000$.

PARTIE B

Ce sont les mêmes questions que pour la partie A mais l'ordre des questions et des réponses a été changé.

1. La bonne réponse est la **réponse a**
2. La bonne réponse est la **réponse d**
3. La bonne réponse est la **réponse b**

PARTIE C

1. La droite $\mathcal{D}$ a pour équation paramétrique $\begin{cases} x = 2 \\ y = 7 - 3t \\ z = -3 + t \end{cases}$ $, t \in \mathbb{R}$

2. On sait que $S \in \Delta$ et comme Δ est parallèle à (Oz) et passe par $B\,(2\,;\,-5\,;\,0)$ alors $S\,(x_B\,;\,y_B\,;\,z_S)$ soit $S\,(2\,;\,-5\,;\,z_S)$. De plus, $S \in \mathcal{D}$, génératrice du cône donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $y_S = 7 - 3t$ et $z_S = -3 + t$. On sait que $y_S = -5$ d'où $-5 = 7 - 3t \Leftrightarrow -3t = -12 \Leftrightarrow t = 4$ et $z_S = -3 + t = 1$. Ainsi, $S\,(2\,;\,-5\,;\,1)$.

3. L'équation du cône $\mathcal{C}$ est du type $(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 = k^2(z - z_S)^2$ car l'axe de ce cône est parallèle à (Oz), c'est-à-dire $(x-2)^2+(y+5)^2 = k^2(z-1)^2$. Comme la droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le cône , tout point de $\mathcal{D}$ est dans le cône, par exemple $A\,(2\,;\,7\,;\,-3) \in \mathcal{C}$. On en déduit que $(2-2)^2+(7+5)^2 = k^2(-3-1)^2$ soit $144 = 16k^2$ et donc $k^2 = \dfrac{144}{16} = 9$. L'équation de $\mathcal{C}$ est $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 9(z-1)^2$.

4. (a) On résout $\begin{cases} (x-2)^2 + (y+5)^2 = 9(z-1)^2 \\ z = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (y+5)^2 = 9(a-1)^2 \\ z = a \end{cases}$. On obtient l'équation du cercle de centre $I\,(2\,;\,-5\,;\,a)$ et de rayon $r = \sqrt{9(a-1)^2} = 3|a-1|$ inclus dans le plan d'équation $z = a$. Comme $0 \leqslant a \leqslant \dfrac{1}{2}$ alors $a - 1 \leqslant -\dfrac{1}{2} < 0$ donc le rayon du cercle est $r = 3(1-a)$.

   (b) La section sera réduite à un point si et seulement si l'équation $(x-2)^2+(y+5)^2 = 9(a-1)^2$ n'admet qu'une solution. C'est le cas seulement pour a tel que $9(a-1)^2 = 0 \leftrightarrow a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$. On obtient alors $\begin{cases} (x-2)^2 + (y+5)^2 = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 5 = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ soit le point $I\,(2\,;\,-5\,;\,1)$.