

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLE N° 5

SUJET (a)

Exercice 1 :

PARTIE A

1. (a) T est "directe" signifie que T conserve les angles orientés ; autrement dit, pour tout point M, N, P et Q tels que $M \neq N$ et $P \neq Q$, $(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{PQ}) \equiv (\overrightarrow{T(M)T(N)}; \overrightarrow{T(P)T(Q)}) \pmod{2\pi}$.
- (b) Les rotations et les homothéties sont des similitudes directes (on aurait aussi pu citer les translations).
- (c) Les réflexions sont des similitudes indirectes.
2. (a) " T est une isométrie" signifie que son rapport est égal à 1 ; autrement dit c'est une similitude qui conserve les distances.
- (b) Les translations sont des isométries ; une homothétie de rapport 2 n'est pas une isométrie.
3. (a) **La phrase est fausse.** Si T est une isométrie sans être une similitude directe (par exemple s'il s'agit d'une symétrie axiale), son écriture complexe ne sera pas de la forme $z' = e^{i\alpha}z + b$. En effet, la transformation associée à une telle écriture complexe est nécessairement une similitude directe puisqu'elle est de la forme $z' = az + b$ avec $a = e^{i\alpha} \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.
- (b) **La phrase est fausse.** Si on considère la similitude directe dont l'écriture complexe est $z' = 2e^{i\frac{\pi}{2}}z$, il s'agit d'une similitude directe d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport 2. Son rapport étant différent de 1, il ne peut pas s'agir d'une rotation.
- (c) **La phrase est fausse.** Si le rapport de l'homothétie est négatif, par exemple $k = -3$, alors c'est une similitude directe est de rapport $|k| = 3 = -k$ (et non k) et l'angle vaut π (et non 0).
- (d) **La phrase est vraie.** Une symétrie centrale de centre Ω transforme le point M en M' défini par $\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$ puisque Ω est le milieu de $[MM']$. Il s'agit donc d'une homothétie de rapport -1 . Les homothéties étant des similitudes directes, les symétries centrales le sont aussi.
- (e) **La phrase est fausse.** Si on considère une translation t de vecteur non nul, elle ne peut pas s'écrire sous la forme $t = h \circ r$ avec h homothétie de centre Ω et r rotation de centre Ω . En effet, si cette décomposition était correcte, on aurait $t(\Omega) = h(r(\Omega)) = h(\Omega) = \Omega$ puisque Ω est invariant par r et par h . Or, une translation de vecteur non nul n'admet aucun point invariant donc il est impossible que $t(\Omega) = \Omega$.

PARTIE B

1. (a) Comme l'écriture complexe de S est du type $z' = az + b$ avec $a = 1 + i\sqrt{3} \in \mathbb{C}^*$ et $b = \sqrt{3}(1 - i) \in \mathbb{C}$, alors S est une similitude directe. Son rapport est $\lambda = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$.
Son angle θ correspond à $\arg(a)$. Or, $1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)$. Ainsi, $\theta \equiv \arg(1 + i\sqrt{3}) \pmod{2\pi}$ soit $\theta \equiv \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$ d'après la forme trigonométrique que l'on vient d'obtenir pour a . L'affixe du centre Ω de cette similitude (qui admet un centre car $a \neq 1$) est

$$\omega = \frac{b}{1 - a} = \frac{\sqrt{3}(1 - i)}{1 - (1 + i\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}(1 - i)}{-i\sqrt{3}} = \frac{i(1 - i)}{-i^2} = i + 1$$

- (b) La similitude réciproque a pour rapport $\lambda' = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$ et son angle est $\theta' \equiv -\theta \pmod{2\pi}$ soit $\theta' \equiv -\frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$.

- (c) Comme $S(\Omega) = \Omega$ alors $S^{-1}(S(\Omega)) = S^{-1}(\Omega)$ soit $\Omega = S^{-1}(\Omega)$. La similitude S^{-1} a le même centre que S . L'écriture complexe de S^{-1} est alors $z' = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}(z - \omega) + \omega$ soit

$$\begin{aligned} z' &= \frac{1}{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) (z - 1 - i) + 1 + i = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (z - 1 - i) + 1 + i \\ &= \left(\frac{1}{4} - i \frac{\sqrt{3}}{4} \right) z - \left(\frac{1}{4} - i \frac{\sqrt{3}}{4} \right) (1 + i) + 1 + i = \left(\frac{1}{4} - i \frac{\sqrt{3}}{4} \right) z + (1 + i) \left(1 - \frac{1}{4} + i \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \\ &= \left(\frac{1}{4} - i \frac{\sqrt{3}}{4} \right) z + (1 + i) \left(\frac{3}{4} + i \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \end{aligned}$$

2. (a) On recherche l'écriture complexe de $f : z' = x' + iy' = -\frac{1}{3}y + 1 + i \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}i^2y + 1 + \frac{1}{3}ix - \frac{1}{3}i$ soit $z' = \frac{1}{3}i(x + iy) + 1 - \frac{1}{3}i = \frac{1}{3}iz + 1 - \frac{1}{3}i$. Comme l'écriture complexe de f est de la forme $z' = az + b$ avec $a = \frac{1}{3}i$ et $b = 1 - \frac{1}{3}i$ alors f est une similitude directe de rapport $\lambda = \left| \frac{1}{3}i \right| = \frac{1}{3}$ et d'angle $\theta \equiv \arg\left(\frac{1}{3}i\right) [2\pi]$ soit $\theta \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ car $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

- (b) $M'(x'; y')$ est sur la droite d'équation $y = 2x + 1$ si et seulement si

$$\begin{aligned} y' = 2x' + 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} = 2 \left(-\frac{1}{3}y + 1 \right) + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}y + 2 + 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow x + 2y = 10 \Leftrightarrow x = 10 - 2y \end{aligned}$$

La forme des abscisses dans le cas où les coordonnées sont entières est $x = 10 - 2y = 2(5 - y)$ avec $5 - y \in \mathbb{Z}$. Autrement dit, ce sont des nombres pairs.

PARTIE C

1. On sait qu'il existe une unique similitude directe qui transforme A en A et I en O donc il suffit de vérifier que la similitude directe d'écriture complexe $z' = (1 + i)z - 1 - 2i$ transforme bien A en A et I en O . On calcule $z'_A = (1 + i)z_A - 1 - 2i = (1 + i)(2 - i) - 1 - 2i = 2 - i + 2i + 1 - 1 - 2i = 2 - i = z_A$. Comme I est le milieu de $[AB]$, $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$. De plus, B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. La forme complexe de cette rotation est $z' = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_O) + z_O = e^{i\frac{\pi}{2}}z = iz$ donc $z_B = iz_A = i(2 - i) = 2i + 1$. Ainsi, $z_I = \frac{2 - i + 2i + 1}{2} = \frac{3 + i}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$. On calcule

$$z'_I = (1 + i)z_I - 1 - 2i = (1 + i) \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \right) - 1 - 2i = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{3}{2}i - \frac{1}{2} - 1 - 2i = 1 + 2i - 1 - 2i = 0 = z_O$$

La similitude dont l'écriture complexe est $z' = (1 + i)z - 1 - 2i$ correspond à la similitude directe de centre A qui transforme I en O . **La phrase est vraie**

2. f est une similitude directe car son écriture complexe est de la forme $z' = az + b$ avec $a = \frac{1}{2}(1 + i)$ et $b = 3 - i$. Son rapport est $\lambda = |a| = \left| \frac{1}{2}(1 + i) \right| = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. De plus, $a = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$ donc $a = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$. L'angle de la similitude directe f est $\theta \equiv \arg(a) [2\pi]$ soit $\theta \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$. Vérifions que le point Ω d'affixe $\omega = 4 + 2i$ est un point invariant pour f :

$$\frac{1}{2}(1 + i)\omega + 3 - i = \frac{1}{2}(1 + i)(4 + 2i) + 3 - i = (1 + i)(2 + i) + 3 - i = 2 + i + 2i - 1 + 3 - i = 4 + 2i = \omega$$

Comme $a \neq 1$, la similitude directe f admet un seul point invariant. On a montré que f est la similitude de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre Ω donc, d'après la cours, sa forme réduite est $f = r \circ h$ où r est

la rotation de centre Ω et d'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$ et h l'homothétie de centre Ω et rapport $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **La phrase est vraie**

3. Si $g \circ f$ correspond à la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ alors $(g \circ f)(A) = B$. Or, $(g \circ f)(A) = g(f(A)) = g(A)$ car A est le centre de f . Ainsi, on a $g(A) = B$. Or, B est le centre de g donc $g(B) = B$. On obtient alors $g(A) = g(B)$, ce qui n'est possible que si $A = B$ par définition d'une transformation (bijection du plan dans lui-même). Or, $A \neq B$ d'après l'énoncé donc $g \circ f$ n'est pas la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. **La phrase est fausse**

Exercice 2 :

1. (a) • *Montrons que S est une transformation*

Pour tout point M du plan d'affixe z_M , on associe un unique point $N = S(M)$ par la relation $z_N = az_M + b$.

Réciproquement, si N est un point du plan, il admet un unique antécédent M par f : en effet, $z_N = az_M + b \Leftrightarrow az_M = z_N - b \Leftrightarrow z_M = \frac{z_N - b}{a}$, la division étant possible puisque $a \neq 0$.

- *Montrons que S est une similitude*

Pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par S ,

$$M'N' = |z_{N'} - z_{M'}| = |az_N + b - (az_M + b)| = |az_N - az_M| = |a(z_N - z_M)| = |a| \times |z_N - z_M| = |a| MN$$

Cela signifie que S est une similitude de rapport $|a|$.

- *Montrons que S est directe*

Soit M, N, P et Q quatre points tels que $M \neq N$ et $P \neq Q$; on note M', N', P' et Q' leurs images respectives par S .

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{M'N'}; \overrightarrow{P'Q'}) &\equiv \arg\left(\frac{z_{Q'} - z_{P'}}{z_{N'} - z_{M'}}\right) [2\pi] \\ &\equiv \arg\left(\frac{az_Q + b - (az_P + b)}{az_N + b - (az_M + b)}\right) [2\pi] \\ &\equiv \arg\left(\frac{az_Q - az_P}{az_N - az_M}\right) [2\pi] \\ &\equiv \arg\left(\frac{a(z_Q - z_P)}{a(z_N - z_M)}\right) [2\pi] \\ &\equiv \arg\left(\frac{z_Q - z_P}{z_N - z_M}\right) [2\pi] \\ &\equiv (\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{PQ}) [2\pi] \end{aligned}$$

Les angles orientés sont conservés et l'angle de la similitude est $\theta \equiv (\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{M'N'}) [2\pi]$ c'est-à-dire $\theta \equiv \arg\left(\frac{z_{M'} - z_{N'}}{z_M - z_N}\right) [2\pi]$. Or,

$$\frac{z_{M'} - z_{N'}}{z_M - z_N} = \frac{az_M + b - (az_N + b)}{z_M - z_N} = \frac{az_M - az_N}{z_M - z_N} = \frac{a(z_M - z_N)}{z_M - z_N} = a$$

Ainsi, $\theta \equiv \arg(a) [2\pi]$.

- (b) On cherche S avec une écriture complexe sous la forme $z' = az + b$.

$s(O) = A \Leftrightarrow z_A = az_O + b$ et $s(A) = B \Leftrightarrow z_B = az_A + b$. On résout le système formé par ces deux équations :

$$\begin{cases} i = 0 + b \\ 1 + 2i = a(i) + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = i \\ ai = 1 + 2i - b = 1 + 2i - i = 1 + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = i \\ a = \frac{1+i}{i} = \frac{(1+i)(-i)}{-i^2} = -i + 1 \end{cases}$$

On obtient un unique couple $(a; b)$ de solutions donc il existe une unique similitude directe S telle que $S(O) = A$ et $S(A) = B$, c'est la similitude dont l'écriture complexe est $z' = (1 - i)z + i$.

(c) Le rapport de la similitude S est $\lambda = |a| = |1 - i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$. Son angle est $\theta \equiv \arg(a) [2\pi]$.

Or, $a = 1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \sqrt{2} \left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4}) \right)$. Ainsi, $\theta \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$. Le centre

Ω de S a pour affixe $w = \frac{b}{1 - a} = \frac{i}{1 - (1 - i)} = \frac{i}{i} = 1$.

2. (a) Pour tout entier naturel n , on considère la propriété P_n : " $z_n = 1 - (1 - i)^n$ ".
- *Initialisation* : pour $n = 0$, $z_0 = 0$ et $1 - (1 - i)^0 = 1 - 1 = 0$ donc la propriété P_0 est vraie.
 - *Etape d'hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose P_n vraie, c'est-à-dire que $z_n = 1 - (1 - i)^n$. Montrons que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que $z_{n+1} = 1 - (1 - i)^{n+1}$. On sait que $z_{n+1} = (1 - i)z_n + i$ puisque $A_{n+1} = S(A_n)$. Ainsi, à l'aide de P_n on obtient :

$$z_{n+1} = (1 - i)[1 - (1 - i)^n] + i = 1 - i - (1 - i)^{n+1} + i = 1 - (1 - i)^{n+1}$$

La propriété P_{n+1} est bien vérifiée.

- *Conclusion* : d'après le principe de récurrence, $z_n = 1 - (1 - i)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\overrightarrow{\Omega A_n} = z_n - \omega = 1 - (1 - i)^n - 1 = -(1 - i)^n$ et

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_n A_{n+1}} &= z_{n+1} - z_n = 1 - (1 - i)^{n+1} - [1 - (1 - i)^n] = 1 - (1 - i)^{n+1} - 1 + (1 - i)^n \\ &= -(1 - i)^n(1 - i - 1) = i(1 - i)^n \end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{\Omega A_n}| = |\overrightarrow{A_n A_{n+1}}| = |-(1 - i)^n| = |(1 - i)^n| = |1 - i|^n = (\sqrt{2})^n \text{ et}$$

$$|\overrightarrow{A_n A_{n+1}}| = |i(1 - i)^n| = |i| \times |(1 - i)^n| = 1 \times (\sqrt{2})^n = (\sqrt{2})^n$$

On remarque que $|\overrightarrow{\Omega A_n}| = |\overrightarrow{A_n A_{n+1}}|$ et $(\overrightarrow{\Omega A_n}; \overrightarrow{A_n A_{n+1}}) \equiv \arg\left(\frac{z_{n+1} - z_n}{z_n - \omega}\right) [2\pi]$.

Or, $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_n - \omega} = \frac{i(1 - i)^n}{-(1 - i)^n}$ d'après les calculs précédents d'où $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_n - \omega} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$. Ainsi,

$$(\overrightarrow{\Omega A_n}; \overrightarrow{A_n A_{n+1}}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$$

(c) Comme $\Omega A_n = A_n A_{n+1}$ et $(\overrightarrow{\Omega A_n}; \overrightarrow{A_n A_{n+1}}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ alors le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est un triangle isocèle rectangle en A_n et il est également indirect.

Pour placer A_3 , on construit un triangle indirect isocèle rectangle en $A_2 = B$ qui se nomme $\Omega B A_3$.

De même, pour A_4 , on construit un triangle indirect isocèle rectangle en A_3 qui se nomme $\Omega A_3 A_4$.

la figure se trouve en fin d'exercice

(d) $A_n \in (\Omega B) \Leftrightarrow (\overrightarrow{\Omega B}; \overrightarrow{\Omega A_n}) \equiv 0 [\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_n - \omega}{z_B - \omega}\right) \equiv 0 [\pi]$.

Or, $\frac{z_n - \omega}{z_B - \omega} = \frac{-(1 - i)^n}{1 + 2i - 1} = \frac{-(1 - i)^n}{2i}$ donc $\arg\left(\frac{z_n - \omega}{z_B - \omega}\right) \equiv \arg(-1) + \arg((1 - i)^n) - \arg(2i) [2\pi]$.

On sait que $-1 \in \mathbb{R}^-$ donc $\arg(-1) \equiv \pi [2\pi]$; $2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ donc $\arg(2i) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. On a justifié à la question 1 que $\arg(1 - i) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$ et $\arg((1 - i)^n) \equiv n \times \arg(1 - i) [2\pi]$ d'où

$\arg((1 - i)^n) \equiv -n\frac{\pi}{4} [2\pi]$. Par conséquent, $A_n \in (\Omega B) \Leftrightarrow \pi - n\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \equiv 0 [\pi]$, autrement dit,

$A_n \in (\Omega B)$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{\pi}{2} - n\frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow -\frac{n}{4} = k - \frac{1}{2} \Leftrightarrow n = 2 - 4k$.

On obtient donc que A_n est sur (ΩB) pour n tel que $n \equiv 2 [4]$.

• Parmi ces points, l'ordonnée sera positive si $\overrightarrow{\Omega A_n}$ et $\overrightarrow{\Omega B}$ sont colinéaires de même sens, c'est-à-dire si $(\overrightarrow{\Omega B}; \overrightarrow{\Omega A_n}) \equiv 0 [2\pi]$. Le raisonnement est identique, seule les congruences changent.

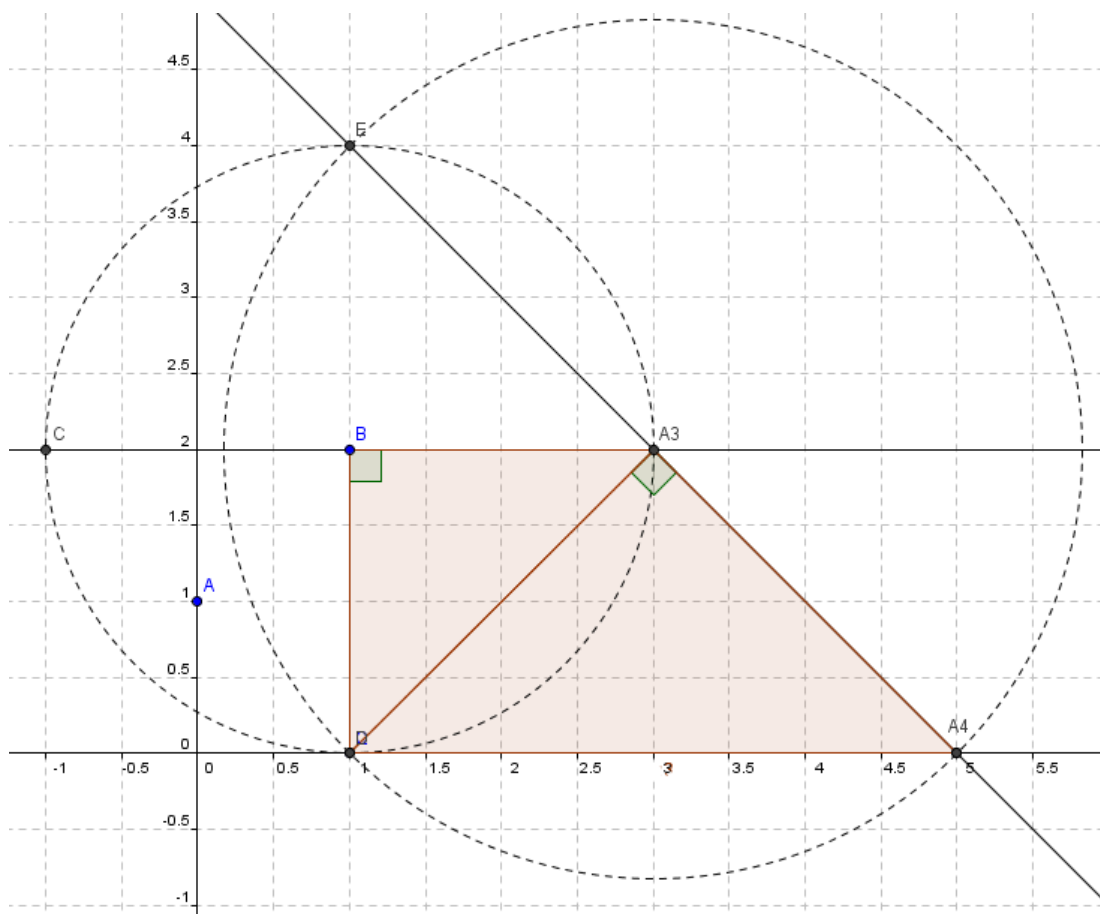
On obtient ainsi : $\pi - n\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \equiv 0 [2\pi]$.

Autrement dit il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{\pi}{2} - n\frac{\pi}{4} = 2k\pi \Leftrightarrow -\frac{n}{4} = 2k - \frac{1}{2} \Leftrightarrow n = 2 - 8k$. Les points A_n de (ΩB) dont l'ordonnée est positive sont ceux tels que $n \equiv 2 \pmod{8}$

- L'ordonnée correspond à $\pm \Omega A_n$. On a montré plus haut que $\Omega A_n = \|\overrightarrow{\Omega A_n}\| = (\sqrt{2})^n$ et ici $n \equiv 2 \pmod{4}$ donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2 + 4k$.

Ainsi, $\Omega A_n = (\sqrt{2})^{2+4k} = (\sqrt{2})^2 \times ((\sqrt{2})^4)^k = 2 \times 4^k = 2 \times 2^{2k} = 2^{2k+1}$. On constate que $57344 = 7 \times 8192$ donc il n'admet pas que des 2 dans sa décomposition en produit de facteurs premiers. Ainsi, il n'existe pas d'entier k tel que $2^{2k+1} = 57344$. Aucun point A_n de (ΩB) n'a une ordonnée égale à 57344.

- L'ordonnée de A_n s'écrit sous la forme $\pm 2^{2k+1}$. C'est un multiple de 2^{16} si et seulement s'il existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $2^{2k+1} = \ell \times 2^{16}$. Cela n'est possible qu'à condition que $2k + 1 \geq 16$, c'est-à-dire $2k \geq 15$ et $k \geq \frac{15}{2}$ soit $k \geq 8$. Réciproquement, dès que $k \geq 8$, alors $2^{2k+1} = 2^{16} \times 2^{2k-15}$ avec $2k - 15 \geq 1$ donc $2^{2k-15} \in \mathbb{Z}$. Finalement, l'ensemble des nombres k qui conviennent est l'ensemble des nombre entiers supérieurs ou égaux à 8 donc pour $n = 2 + 4k$, on obtient $n \geq 2 + 4 \times 8 = 34$.



Exercice 3 :

1. (a) $S(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \lambda \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta \pmod{2\pi} \end{cases}$

- (b) • L'angle de s_1 est $\theta_1 \equiv (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) \pmod{2\pi}$. Comme AMB est isocèle rectangle en M et de sens direct, alors $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$. L'angle de s_1 est $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$. Le rapport de s_1 est $\lambda_1 = \frac{AB}{AM}$. Comme AMB est rectangle en M , alors d'après le théorème de Pythagore, $AB^2 = AM^2 + MB^2$. Or, $AM = MB$ car AMB est isocèle en M d'où $AB^2 = 2AM^2$ et donc $AB = \sqrt{2}AM$ puis $\lambda_1 = \frac{AB}{AM} = \sqrt{2}$.

- L'angle de s_2 est $\theta_2 \equiv (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{ON}) [2\pi]$. Comme BNO est isocèle rectangle en N et de sens direct, alors $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{ON}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$. L'angle de s_2 est $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$. Le rapport de s_2 est $\lambda_2 = \frac{ON}{OB}$. Comme BNO est rectangle en N , avec un raisonnement analogue à celui effectué dans le triangle AMB , on obtient que $OB = \sqrt{2}ON$ et $\lambda_2 = \frac{ON}{\sqrt{2}ON} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(c) $r(M) = s_2(s_1(M)) = s_2(B) = N$.

Comme AIP est un triangle isocèle rectangle en I et direct alors $AP = \sqrt{2}AI$ et $(\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AI}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$. On en déduit que $s_1(I) = P$ puisque s_1 est la similitude directe de centre A , de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$. De même, OPI est un triangle direct, isocèle rectangle en I d'où $OP = \sqrt{2}OI \Leftrightarrow OI = \frac{1}{\sqrt{2}}OP = \frac{\sqrt{2}}{2}OP$ et $(\overrightarrow{OP}; \overrightarrow{OI}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$. Comme s_2 est la similitude directe de centre O , de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$, on peut conclure que $s_2(P) = I$. Ainsi, $r(I) = s_2(s_1(I)) = s_2(P) = I$.

- (d) r est la composée de deux similitudes directes donc c'est une similitude directe. Son rapport est le produit $\lambda_1 \times \lambda_2 = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$ et son angle est $\theta \equiv \theta_1 + \theta_2 [2\pi]$ soit $\theta \equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} [2\pi]$ c'est-à-dire $\theta \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. On a de plus justifié que $r(I) = I$ donc I est l'unique point invariant de r (r n'est pas l'identité car son angle est $\frac{\pi}{2}$). La similitude directe de centre I de rapport 1 et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- (e) On sait que OPI est un triangle direct isocèle rectangle en I donc $IO = IP$ et $(\overrightarrow{IO}; \overrightarrow{IP}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Cela signifie que $r(O) = P$.

- (f) On sait que $r(O) = P$ et $r(M) = N$ donc l'angle de la rotation r est par définition $(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{PN})$. L'angle de r étant $\frac{\pi}{2}$, on en déduit que $(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{PN}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Les droites (OM) et (PN) sont donc perpendiculaires.

2. (a) L'écriture complexe de s_1 est

$$\begin{aligned} z' &= \lambda_1 e^{i\theta_1} (z - z_A) + z_A = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) (z - 2) + 2 = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) (z - 2) + 2 \\ &= (1 + i)(z - 2) + 2 = (1 + i)z - 2 + 2 = (1 + i)z - 2i \end{aligned}$$

L'écriture complexe de s_2 est

$$\begin{aligned} z' &= \lambda_2 e^{i\theta_2} (z - z_O) + z_O = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) z = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) z \\ &= \frac{1}{2}(1 + i)z \end{aligned}$$

- (b) On sait que $s_1(M) = B$ donc $(1 + i)z_M - 2i = z_B = \frac{3}{2} + i \Leftrightarrow (1 + i)z_M = \frac{3}{2} + i + 2i = \frac{3}{2} + 3i$.

$$\text{Par conséquent, } z_M = \frac{\frac{3}{2} + 3i}{1 + i} = \frac{(\frac{3}{2} + 3i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i + 3i + 3}{2} = \frac{\frac{9}{2} + \frac{3}{2}i}{2} = \frac{9}{4} + \frac{3}{4}i.$$

On sait aussi que $s_2(B) = N$ donc

$$\frac{1}{2}(1 + i)z_B = z_N \Leftrightarrow z_N = \frac{1}{2}(1 + i) \left(\frac{9}{2} + \frac{3}{2}i \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{9}{2} + \frac{3}{2}i + \frac{9}{2}i - \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i \right) = \frac{1}{4} + \frac{5}{4}i$$

(c) On lit $z_P = 1 - i$. De plus, $(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{PN}) \equiv \arg\left(\frac{z_N - z_P}{z_M - z_O}\right) [2\pi]$. Or,

$$\begin{aligned} \frac{z_N - z_P}{z_M - z_O} &= \frac{\frac{1}{4} + \frac{5}{4}i - 1 + i}{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}i} = \frac{\frac{1+5i-4+4i}{4}}{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}i} = \frac{-3+9i}{9+3i} = \frac{-1+3i}{3+i} = \frac{(-1+3i)(3-i)}{9+1} = \frac{-3+i+9i+3}{10} \\ &= \frac{10i}{10} = i \end{aligned}$$

Ainsi, $(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{PN}) \equiv \arg(i) [2\pi]$ soit $(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{PN}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Les droites (OM) et (PN) sont alors perpendiculaires.

SUJET (b)**Exercice 1 :****PARTIE A**

1. voir sujet a)
2. voir sujet a)
3. (a) **La phrase est fausse.** Si on considère une translation t de vecteur non nul, elle ne peut pas s'écrire sous la forme $t = h \circ r$ avec h homothétie de centre Ω et r rotation de centre Ω . En effet, si cette décomposition était correcte, on aurait $t(\Omega) = h(r(\Omega)) = h(\Omega) = \Omega$ puisque Ω est invariant par r et par h . Or, une translation de vecteur non nul n'admet aucun point invariant donc il est impossible que $t(\Omega) = \Omega$.
- (b) **La phrase est fausse.** Si le rapport de l'homothétie est négatif, par exemple $k = -3$, alors c'est une similitude directe est de rapport $|k| = 3 = -k$ (et non k) et l'angle vaut π (et non 0).
- (c) **La phrase est vraie.** Une symétrie centrale de centre Ω transforme le point M en M' défini par $\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$ puisque Ω est le milieu de $[MM']$. Il s'agit donc d'une homothétie de rapport -1 . Les homothéties étant des similitudes directes, les symétries centrales le sont aussi.
- (d) **La phrase est fausse.** Si T est une isométrie sans être une similitude directe (par exemple s'il s'agit d'une symétrie axiale), son écriture complexe ne sera pas de la forme $z' = e^{i\alpha}z + b$. En effet, la transformation associée à une telle écriture complexe est nécessairement une similitude directe puisqu'elle est de la forme $z' = az + b$ avec $a = e^{i\alpha} \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.
- (e) **La phrase est fausse.** Si on considère la similitude directe dont l'écriture complexe est $z' = 2e^{i\frac{\pi}{2}}z$, il s'agit d'une similitude directe d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport 2. Son rapport étant différent de 1, il ne peut pas s'agir d'une rotation.

PARTIE B

1. (a) Comme l'écriture complexe de S est du type $z' = az + b$ avec $a = 1 + i\sqrt{3} \in \mathbb{C}^*$ et $b = \sqrt{3}(1 + i) \in \mathbb{C}$, alors S est une similitude directe. Son rapport est $\lambda = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$.
Son angle θ correspond à $\arg(a)$. Or, $1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)$. Ainsi, $\theta \equiv \arg(1 + i\sqrt{3}) [2\pi]$ soit $\theta \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ d'après la forme trigonométrique que l'on vient d'obtenir pour a . L'affixe du centre Ω de cette similitude (qui admet un centre car $a \neq 1$) est

$$\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{\sqrt{3}(1+i)}{1-(1+i\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}(1+i)}{-i\sqrt{3}} = \frac{i(1+i)}{-i^2} = i - 1$$

- (b) La similitude réciproque a pour rapport $\lambda' = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$ et son angle est $\theta' \equiv -\theta [2\pi]$ soit $\theta' \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$.
- (c) Comme $S(\Omega) = \Omega$ alors $S^{-1}(S(\Omega)) = S^{-1}(\Omega)$ soit $\Omega = S^{-1}(\Omega)$. La similitude S^{-1} a le même centre que S . L'écriture complexe de S^{-1} est alors $z' = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}(z - \omega) + \omega$ soit

$$\begin{aligned} z' &= \frac{1}{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) (z + 1 - i) - 1 + i = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) (z + 1 - i) - 1 + i \\ &= \left(\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4} \right) z + \left(\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4} \right) (1 - i) - 1 + i = \left(\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4} \right) z + (1 - i) \left(\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4} - 1 \right) \\ &= \left(\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4} \right) z - (1 - i) \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} \right) \end{aligned}$$

2. (a) On recherche l'écriture complexe de $f : z' = x' + iy' = -\frac{1}{5}y - 1 + i \left(\frac{1}{5}x + \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{5}i^2y - 1 + \frac{1}{5}ix + \frac{1}{5}i$ soit $z' = \frac{1}{5}i(x + iy) - 1 + \frac{1}{5}i = \frac{1}{5}iz - 1 + \frac{1}{5}i$. Comme l'écriture complexe de f est de la forme

$z' = az + b$ avec $a = \frac{1}{5}i$ et $b = -1 + \frac{1}{5}i$ alors f est une similitude directe de rapport $\lambda = \left| \frac{1}{5}i \right| = \frac{1}{5}$ et d'angle $\theta \equiv \arg\left(\frac{1}{5}i\right) [2\pi]$ soit $\theta \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ car $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

(b) $M'(x'; y')$ est sur la droite d'équation $y = 3x + 5$ si et seulement si

$$\begin{aligned} y' = 3x' + 5 &\Leftrightarrow \frac{1}{5}x + \frac{1}{5} = 3\left(-\frac{1}{5}y - 1\right) + 5 \Leftrightarrow \frac{1}{5}x + \frac{1}{5} = -\frac{3}{5}y - 3 + 5 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}y = 2 - \frac{1}{5} = \frac{9}{5} \Leftrightarrow x + 3y = 9 \Leftrightarrow x = 9 - 3y \end{aligned}$$

La forme des abscisses dans le cas où les coordonnées sont entières est $x = 9 - 3y = 3(3 - y)$ avec $3 - y \in \mathbb{Z}$. Autrement dit, ce sont des nombres multiples de 3.

PARTIE C

1. Si $g \circ f$ correspond à la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ alors $(g \circ f)(A) = B$. Or, $(g \circ f)(A) = g(f(A)) = g(A)$ car A est le centre de f . Ainsi, on a $g(A) = B$. Or, B est le centre de g donc $g(B) = B$. On obtient alors $g(A) = g(B)$, ce qui n'est possible que si $A = B$ par définition d'une transformation (bijection du plan dans lui-même). Or, $A \neq B$ d'après l'énoncé donc $g \circ f$ n'est pas la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

La phrase est fausse

2. On sait qu'il existe une unique similitude directe qui transforme A en A et I en O donc il suffit de vérifier que la similitude directe d'écriture complexe $z' = (1+i)z - 1 - 2i$ transforme bien A en A et I en O . On calcule $z'_A = (1+i)z_A - 1 - 2i = (1+i)(2-i) - 1 - 2i = 2 - i + 2i + 1 - 1 - 2i = 2 - i = z_A$. Comme I est le milieu de $[AB]$, $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$. De plus, B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. La forme complexe de cette rotation est $z' = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_O) + z_O = e^{i\frac{\pi}{2}}z = iz$ donc $z_B = iz_A = i(2-i) = 2i + 1$. Ainsi, $z_I = \frac{2-i+2i+1}{2} = \frac{3+i}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$. On calcule

$$z'_I = (1+i)z_I - 1 - 2i = (1+i)\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right) - 1 - 2i = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{3}{2}i - \frac{1}{2} - 1 - 2i = 1 + 2i - 1 - 2i = 0 = z_O$$

La similitude dont l'écriture complexe est $z' = (1+i)z - 1 - 2i$ correspond à la similitude directe de centre A qui transforme I en O . **La phrase est vraie**

3. f est une similitude directe car son écriture complexe est de la forme $z' = az + b$ avec $a = \frac{1}{2}(1+i)$ et $b = -3+i$. Son rapport est $\lambda = |a| = \left| \frac{1}{2}(1+i) \right| = \frac{1}{2}\sqrt{1+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. De plus, $a = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$ donc $a = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$. L'angle de la similitude directe f est $\theta \equiv \arg(a) [2\pi]$ soit $\theta \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$. Vérifions que le point Ω d'affixe $\omega = -4 - 2i$ est un point invariant pour f :

$$\frac{1}{2}(1+i)\omega - 3+i = \frac{1}{2}(1+i)(-4-2i) - 3+i = (1+i)(-2-i) - 3+i = -2-i-2i+1-3+i = -4-2i = \omega$$

Comme $a \neq 1$, la similitude directe f admet un seul point invariant. On a montré que f est la similitude de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre Ω donc, d'après la cours, sa forme réduite est $f = r \circ h$ où r est la rotation de centre Ω et d'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$ et h l'homothétie de centre Ω et rapport $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **La phrase est vraie**

Exercice 2 : Seule la toute dernière question diffère par rapport au sujet a)**2.d)**

- Parmi ces points, l'ordonnée sera négative si $\overrightarrow{\Omega A_n}$ et $\overrightarrow{\Omega B}$ sont colinéaires de sens contraire, c'est-à-dire si $(\overrightarrow{\Omega B}; \overrightarrow{\Omega A_n}) \equiv \pi [2\pi]$. Le raisonnement est identique, en reprenant les calculs pour déterminer les valeurs de n telles que $A_n \in (\Omega B)$, on obtient : $\pi - n\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \equiv \pi [2\pi]$.
Autrement dit il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{\pi}{2} - n\frac{\pi}{4} = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow -\frac{n}{4} = 1 + 2k - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 2k \Leftrightarrow n = -2 - 8k$.
Les points A_n de (ΩB) dont l'ordonnée est négative sont ceux tels que $n \equiv -2 [8]$ ou encore $n \equiv 6 [8]$
- L'ordonnée correspond à $\pm \Omega A_n$. On a montré plus haut que $\Omega A_n = \|\overrightarrow{\Omega A_n}\| = (\sqrt{2})^n$ et ici $n \equiv 2 [4]$ donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2 + 4k$.
Ainsi, $\Omega A_n = (\sqrt{2})^{2+4k} = (\sqrt{2})^2 \times ((\sqrt{2})^4)^k = 2 \times 4^k = 2 \times 2^{2k} = 2^{2k+1}$. On constate que $45056 = 11 \times 4096$ donc il n'admet pas que des 2 dans sa décomposition en produit de facteurs premiers. Ainsi, il n'existe pas d'entier k tel que $2^{2k+1} = 45056$. Aucun point A_n de (ΩB) n'a une ordonnée égale à 45056.
- L'ordonnée de A_n s'écrit sous la forme $\pm 2^{2k+1}$. C'est un multiple de 2^{14} si et seulement s'il existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $2^{2k+1} = \ell \times 2^{14}$. Cela n'est possible qu'à condition que $2k + 1 \geq 14$, c'est-à-dire $2k \geq 13$ et $k \geq \frac{13}{2}$ soit $k \geq 7$. Réciproquement, dès que $k \geq 7$, alors $2^{2k+1} = 2^{14} \times 2^{2k-13}$ avec $2k - 13 \geq 1$ donc $2^{2k-13} \in \mathbb{Z}$. Finalement, l'ensemble des nombres k qui conviennent est l'ensemble des nombre entiers supérieurs ou égaux à 7 donc pour $n = 2 + 4k$, on obtient $n \geq 2 + 4 \times 7 = 30$.

Exercice 3 : voir sujet a)