

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLE N° 3

SUJET (a)

Exercice 1

- (a) Deux événements disjoints sont des événements qui n'ont aucune issue en commun ; autrement dit, cela signifie que leur intersection est vide.
(b) • La phrase est vraie car les issues de $A \cap B$ sont les issues qui se trouvent à la fois dans A et dans B et les issues de $A \cup B$ sont les issues qui se trouvent dans A ou dans B ou dans les deux à la fois c'est-à-dire dans $A \cap B$. Ainsi, $(A \cap B) \subset (A \cup B)$ (voir l'annexe pour une justification à l'aide d'un schéma)
• C'est faux car des événements peuvent être incompatibles sans être contraires. En effet, on peut avoir $A \cap B = \emptyset$ mais $B \neq \bar{A}$ (ou encore $A \cup B \neq \Omega$). Par exemple, dans le cas d'un lancer de dé cubique, si $A = \{1; 3; 5\}$ et $B = \{2\}$ alors A et B sont disjoints mais ne sont pas contraires puisque 4 par exemple n'appartient ni à A ni à B .
- (a) $EFGH$ est un parallélogramme signifie que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$.
(b) I est le milieu de $[AB]$ signifie que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$
(c) S est l'image de R par la translation de vecteur $\vec{u}$ signifie que $\overrightarrow{RS} = \vec{u}$.

Exercice 2 : voir annexe pour les constructions

Pour la question 5, l'ensemble des points M tels que $AM = CM$ est l'ensemble des points équidistants de A et de C , c'est-à-dire de la droite Δ , médiatrice de $[AC]$.

Exercice 3 :

- $f(x) = (3x - 5)^2 - 4x^2 = (3x)^2 - 2 \times (3x) \times 5 + 5^2 - 4x^2 = 9x^2 - 30x + 25 - 4x^2 = 5x^2 - 30x + 25$.
- $$\begin{aligned} f(x) &= (3x - 5)^2 - 4x^2 = (3x - 5)^2 - (2x)^2 \\ &= [(3x - 5) - (2x)][(3x - 5) + (2x)] = (3x - 5 - 2x)(3x - 5 + 2x) = (x - 5)(5x - 5) = 5(x - 5)(x - 1) \end{aligned}$$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $5(x - 3)^2 - 20 = 5(x^2 - 6x + 9) - 20 = 5x^2 - 30x + 45 - 20 = 5x^2 - 30x + 25 = f(x)$ (on retrouve la forme développée de $f(x)$).
- (a) On calcule $f(\sqrt{2})$ avec la forme développée :

$$f(\sqrt{2}) = 5 \left(\sqrt{2} \right)^2 - 30\sqrt{2} + 25 = 5 \times 2 - 30\sqrt{2} + 25 = 10 + 25 - 30\sqrt{2} = 35 - 30\sqrt{2}$$

L'ordonnée du point de $\mathcal{C}_f$ dont l'abscisse vaut $\sqrt{2}$ est $35 - 30\sqrt{2}$.

- (b) On utilise la formule $f(x) = 5(x - 3)^2 - 20$ démontrée au 3. Comme un carré est toujours positif, alors $(x - 3)^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Si on multiplie par le nombre positif 5, on obtient encore $5(x - 3)^2 \geq 0$ puis en ajoutant -20 , cela donne $5(x - 3)^2 - 20 \geq -20$, soit $f(x) \geq -20$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On recherche ensuite si -20 admet des antécédents par f en résolvant $f(x) = -20$.

$$f(x) = -20 \Leftrightarrow 5(x - 3)^2 - 20 = -20 \Leftrightarrow 5(x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

On peut finalement conclure que -20 est le minimum de f et qu'il est atteint en 3.

(c) On utilise la forme factorisée de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) = x - 1 &\Leftrightarrow 5(x - 5)(x - 1) = x - 1 \Leftrightarrow 5(x - 5)(x - 1) - (x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)[5(x - 5) - 1] = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(5x - 25 - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(5x - 26) = 0 \end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. On obtient donc $x - 1 = 0$ ou $5x - 26 = 0$. Or, $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et $5x - 26 = 0 \Leftrightarrow 5x = 26 \Leftrightarrow x = \frac{26}{5}$. L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \left\{1; \frac{26}{5}\right\}$.

(d) On doit résoudre $f(x) = 25$ et on utilise pour cela la forme développée de $f(x)$:

$$f(x) = 25 \Leftrightarrow 5x^2 - 30x + 25 = 25 \Leftrightarrow 5x^2 - 30x = 0 \Leftrightarrow 5x(x - 6) = 0 \Leftrightarrow x(x - 6) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. On obtient donc $x = 0$ ou $x - 6 = 0$, c'est-à-dire $x = 0$ ou $x = 6$. Le nombre 25 admet deux antécédents par f qui valent 0 et 6.

5. (a) L'équation (E) équivaut à :

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} - \frac{2x}{3x-5} - \frac{5}{2x} = 0 &\Leftrightarrow \frac{3x(3x-5) - 2x \times (2x) - 5(3x-5)}{2x(3x-5)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3x(3x-5) - 5(3x-5) - 4x^2}{2x(3x-5)} = 0 \Leftrightarrow \frac{(3x-5)(3x-5) - 4x^2}{2x(3x-5)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(3x-5)^2 - 4x^2}{2x(3x-5)} = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{2x(3x-5)} = 0 \end{aligned}$$

(b) On résout $\frac{f(x)}{2x(3x-5)} = 0$ en commençant par déterminer les valeurs interdites :

$$2x(3x-5) = 0 \Leftrightarrow x(3x-5) = 0$$

Or, un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, donc l'équation devient : $x = 0$ ou $3x - 5 = 0$. Comme $3x - 5 = 0 \Leftrightarrow 3x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$ alors il y a deux valeurs interdites : 0 et $\frac{5}{3}$.

De plus, un quotient est nul lorsque son numérateur est nul donc pour $x \neq 0$ et $x \neq \frac{5}{3}$, on est amené à résoudre $f(x) = 0$. Pour cela on se sert de la forme factorisée de $f(x)$:

$$5(x-5)(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x-1) = 0$$

On utilise une nouvelle fois la règle du produit de facteurs nul pour conclure que $x-5 = 0$ ou $x-1 = 0$ c'est-à-dire $x = 5$ ou $x = 1$. Ces deux valeurs étant distinctes des valeurs interdites, on peut alors affirmer que l'ensemble des solutions de (E) est $\mathcal{S} = \{5; 1\}$.

Exercice 4 :

- L'univers de cette expérience aléatoire est $\Omega = \{10; 11; 12; \dots; 98; 99\}$. Contrairement à $[10; 99]$, cet ensemble ne comporte que des nombres entiers donc $\Omega \neq [10; 99]$.
- Dire que $C \subset B$ signifie que si un nombre est dans C , il est aussi dans B . C'est faux car il existe des nombres pairs de Ω qui ne sont pas multiples de 10 : par exemple 12.
- Par définition de B , $B = \{10; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80; 90\}$. Aucun de ces nombres ne se trouvent dans A donc $A \cap B = \emptyset$, ce qui signifie bien que A et B sont incompatibles.
- Dans $A \cup C$, se trouvent en particulier tous les nombres de C , c'est-à-dire tous les nombres pairs de Ω . Il est donc impossible que $A \cup C$ soit réduit à $\{22; 44; 66; 88\}$ (en fait cet ensemble est $A \cap C$).

La bonne réponse est la réponse c).

2. • Pour résoudre l'équation $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = 0$, on commence par déterminer les valeurs interdites : $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Comme un quotient est nul lorsque son numérateur est nul, on est amené à résoudre, pour $x \neq 1$, $x^2 - 1 = 0$. Or, $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) = 0$ et un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. On obtient donc $x - 1 = 0$ ou $x + 1 = 0$ c'est-à-dire $x = 1$ ou $x = -1$. Cependant, $x = 1$ est la valeur interdite donc elle ne peut pas être solution. L'unique solution est donc -1 .
- Cette équation n'a pas le même ensemble de solution que $x^2 - 1 = 0$ car le nombre 1 est solution de $x^2 - 1 = 0$ mais il n'est pas solution de $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = 0$.
- L'équation proposée n'équivaut pas à $x^2 - 1 = 0$ ou $x - 1 = 0$ puisque le dénominateur $x - 1$ ne peut, au contraire, pas être nul.

La bonne réponse est la réponse a).

3. • E et F ne sont pas contraires car la lettre S se trouve dans Ω mais ne se trouve ni dans E ni dans F .
- Comme F ne contient pas de voyelle alors $E \cap F = \emptyset$, ce n'est donc pas un événement élémentaire.
- $\overline{F} = \{A; S\}$ et cet ensemble n'est pas inclus dans E car S n'est pas une voyelle.
- $\overline{E}$ correspond à "on a tiré une consonne" donc $\overline{E} = \{M; T; H; S\}$. Comme $F \subset \overline{E}$ alors $\overline{E} \cup F = \overline{E}$.

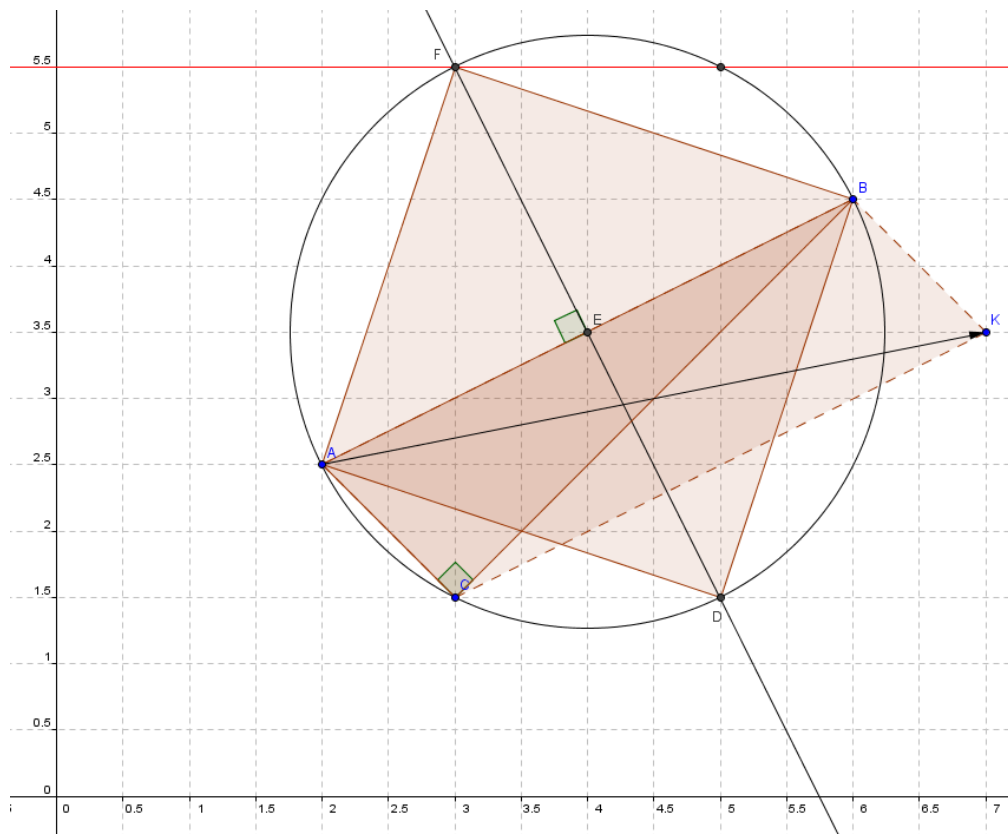
La bonne réponse est la réponse d).

4. • Comme $EBCD$ est un parallélogramme alors $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CE}$ d'après la règle du parallélogramme donc $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} \neq \overrightarrow{BD}$.
- $\overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{QN}$ donc $\overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PQ} \neq 0$.
- $\overrightarrow{ED} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BC}$. Or $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AB}$ car $ABDE$ est un parallélogramme. Ainsi, $\overrightarrow{ED} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
- $\overrightarrow{ME} - \overrightarrow{EN} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{NE} + \overrightarrow{PD}$ et cette somme ne peut pas s'écrire comme un seul vecteur constitué de points de la figure.

La bonne réponse est la réponse c).

Exercice 5

1. Figure :



$$2. AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (6 - 2)^2 + \left(\frac{9}{2} - \frac{5}{2}\right)^2 = 4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20$$

$$BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = (3 - 6)^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{9}{2}\right)^2 = (-3)^2 + (-3)^2 = 9 + 9 = 18$$

$$AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = (3 - 2)^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{2}\right)^2 = 1^2 + (-1)^2 = 1 + 1 = 2.$$

On constate que $BC^2 + AC^2 = 18 + 2 = 20 = AB^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en C .

3. Comme ABC est rectangle en C alors il est inscrit dans le cercle de diamètre $[AB]$. Autrement dit, le cercle $\mathcal{C}$ a pour centre le milieu de $[AB]$ et pour rayon $r = \frac{AB}{2}$. Comme E est le milieu de $[AB]$, $x_E = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2 + 6}{2} = 4$ et $y_E = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{\frac{5}{2} + \frac{9}{2}}{2} = \frac{14}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$. Ainsi, $E\left(4; \frac{7}{2}\right)$. On a montré que $AB^2 = 20$ donc $AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ et $r = \frac{AB}{2} = \sqrt{5}$.

4. On sait que $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{ED}$ donc E est le milieu de $[FD]$. De plus, E est le milieu de $[AB]$. Les diagonales de $ADBF$ se coupent en leur milieu donc c'est un parallélogramme. De plus, D est sur la médiatrice de $[AB]$. Comme E est le milieu de $[AB]$ alors il se trouve aussi sur la médiatrice de $[AB]$. Finalement, la droite (DE) est la médiatrice de $[AB]$ donc (DE) est perpendiculaire à (AB) . Comme E est le milieu de $[DF]$ alors $(DE) = (DF)$ donc les diagonales de $ADBF$ sont perpendiculaires. Cela signifie que le parallélogramme $ADBF$ est un losange. On sait que D est sur le cercle $\mathcal{C}$ et que E est à la fois le centre de $\mathcal{C}$ et le milieu de $[DF]$. Par conséquent, $[DF]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$. On a aussi montré que $[AB]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$. On en déduit que $DF = AB$ donc les diagonales de $ADBF$ sont de même longueur. Un losange dont les diagonales sont de même longueur est un carré. Finalement, $ADBF$ est un carré.

5. On cherche les points $M\left(x; \frac{11}{2}\right)$ qui se trouvent sur le cercle $\mathcal{C}$, c'est-à-dire qui vérifient $EM = \sqrt{5}$ ou encore $EM^2 = 5$.

$$EM^2 = (x_M - x_E)^2 + (y_M - y_E)^2 = (x - 4)^2 + \left(\frac{11}{2} - \frac{7}{2}\right)^2 = (x - 4)^2 + 2^2 = (x - 4)^2 + 4$$

Il nous faut donc résoudre :

$$(x - 4)^2 + 4 = 5 \Leftrightarrow (x - 4)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 4 - 1)(x - 4 + 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 5)(x - 3) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. Cette équation équivaut donc à $x - 5 = 0$ ou $x - 3 = 0$ soit $x = 5$ ou $x = 3$. On trouve donc deux points : $M_1\left(5; \frac{11}{2}\right)$ et $M_2\left(3; \frac{11}{2}\right)$ (en fait $M_1 = F$).

6. (a) D'après la règle du parallélogramme, $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$ équivaut à $ACKB$ est un parallélogramme. Cette information signifie que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BK}$.

(b) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$. On a vu que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BK}$. Comme $ADBF$ est un carré alors $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FB}$. Ainsi, $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{EK}$.

SUJET (b)

Exercice 1

1. (a) N est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ signifie que $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$.
(b) $IJKL$ est un parallélogramme signifie que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$.
(c) K est le milieu de $[CD]$ signifie que $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{KD}$.
2. (a) Deux événements incompatibles sont des événements qui n'ont aucune issue en commun ; autrement dit, cela signifie que leur intersection est vide.
(b) • C'est faux car des événements peuvent être incompatibles sans être contraires. En effet, on peut avoir $A \cap B = \emptyset$ mais $B \neq \overline{A}$ (ou encore $A \cup B \neq \Omega$). Par exemple, dans le cas d'un lancer de dé cubique, si $A = \{1; 3; 5\}$ et $B = \{2\}$ alors A et B sont disjoints mais ne sont pas contraires puisque 4 par exemple n'appartient ni à A ni à B .
• La phrase est vraie car les issues de $A \cap B$ sont les issues qui se trouvent à la fois dans A et dans B et les issues de $A \cup B$ sont les issues qui se trouvent dans A ou dans B ou dans les deux à la fois c'est-à-dire dans $A \cap B$. Ainsi, $(A \cap B) \subset (A \cup B)$ (voir l'annexe pour une justification à l'aide d'un schéma)

Exercice 2 : voir annexe pour les constructions

Pour la question 5, l'ensemble des points M tels que $AM = CM$ est l'ensemble des points équidistants de A et de C , c'est-à-dire de la droite Δ , médiatrice de $[AC]$.

Exercice 3 :

1. $f(x) = (4x - 7)^2 - 9x^2 = (4x)^2 - 2 \times (4x) \times 7 + 7^2 - 9x^2 = 16x^2 - 56x + 49 - 9x^2 = 7x^2 - 56x + 49$.
2.
$$\begin{aligned} f(x) &= (4x - 7)^2 - 9x^2 = (4x - 7)^2 - (3x)^2 \\ &= [(4x - 7) - (3x)][(4x - 7) + (3x)] = (4x - 7 - 3x)(4x - 7 + 3x) = (x - 7)(7x - 7) = 7(x - 7)(x - 1) \end{aligned}$$
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $7(x - 4)^2 - 63 = 7(x^2 - 8x + 16) - 63 = 7x^2 - 56x + 112 - 63 = 7x^2 - 56x + 49 = f(x)$ (on retrouve la forme développée de $f(x)$).
4. (a) On calcule $f(\sqrt{3})$ avec la forme développée :

$$f(\sqrt{3}) = 7(\sqrt{3})^2 - 56\sqrt{3} + 49 = 7 \times 3 - 56\sqrt{3} + 49 = 21 + 49 - 56\sqrt{3} = 70 - 56\sqrt{3}$$

L'ordonnée du point de $\mathcal{C}_f$ dont l'abscisse vaut $\sqrt{3}$ est $70 - 56\sqrt{3}$.

- (b) On utilise la formule $f(x) = 7(x - 4)^2 - 63$ démontrée au 3. Comme un carré est toujours positif, alors $(x - 4)^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Si on multiplie par le nombre positif 5, on obtient encore $7(x - 4)^2 \geq 0$ puis en ajoutant -63 , cela donne $7(x - 4)^2 - 63 \geq -63$, soit $f(x) \geq -63$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On recherche ensuite si -63 admet des antécédents par f en résolvant $f(x) = -63$.

$$f(x) = -63 \Leftrightarrow 7(x - 4)^2 - 63 = -63 \Leftrightarrow 7(x - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

On peut finalement conclure que -63 est le minimum de f et qu'il est atteint en 4.

- (c) On utilise la forme factorisée de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) = x - 1 &\Leftrightarrow 7(x - 7)(x - 1) = x - 1 \Leftrightarrow 7(x - 7)(x - 1) - (x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)[7(x - 7) - 1] = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(7x - 49 - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(7x - 50) = 0 \end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. On obtient donc $x - 1 = 0$ ou $7x - 50 = 0$. Or, $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et $7x - 50 = 0 \Leftrightarrow 7x = 50 \Leftrightarrow x = \frac{50}{7}$. L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \left\{ 1; \frac{50}{7} \right\}$.

(d) On doit résoudre $f(x) = 49$ et on utilise pour cela la forme développée de $f(x)$:

$$f(x) = 49 \Leftrightarrow 7x^2 - 56x + 49 = 49 \Leftrightarrow 7x^2 - 56x = 0 \Leftrightarrow 7x(x - 8) = 0 \Leftrightarrow x(x - 8) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. On obtient donc $x = 0$ ou $x - 8 = 0$, c'est-à-dire $x = 0$ ou $x = 8$. Le nombre 49 admet deux antécédents par f qui valent 0 et 8.

5. (a) L'équation (E) équivaut à :

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} - \frac{3x}{4x-7} - \frac{7}{3x} = 0 &\Leftrightarrow \frac{4x(4x-7) - 3x \times (3x) - 7(4x-7)}{3x(4x-7)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{4x(4x-7) - 7(4x-7) - 9x^2}{3x(4x-7)} = 0 \Leftrightarrow \frac{(4x-7)(4x-7) - 9x^2}{3x(4x-7)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(4x-7)^2 - 9x^2}{3x(4x-7)} = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{3x(4x-7)} = 0 \end{aligned}$$

(b) On résout $\frac{f(x)}{3x(4x-7)} = 0$ en commençant par déterminer les valeurs interdites :

$$3x(4x-7) = 0 \Leftrightarrow x(4x-7) = 0$$

Or, un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, donc l'équation devient : $x = 0$ ou $4x - 7 = 0$. Comme $4x - 7 = 0 \Leftrightarrow 4x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{4}$ alors il y a deux valeurs interdites : 0 et $\frac{7}{4}$.

De plus, un quotient est nul lorsque son numérateur est nul donc pour $x \neq 0$ et $x \neq \frac{7}{4}$, on est amené à résoudre $f(x) = 0$. Pour cela on se sert de la forme factorisée de $f(x)$:

$$7(x-7)(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-7)(x-1) = 0$$

On utilise une nouvelle fois la règle du produit de facteurs nul pour conclure que $x-7=0$ ou $x-1=0$ c'est-à-dire $x=7$ ou $x=1$. Ces deux valeurs étant distinctes des valeurs interdites, on peut alors affirmer que l'ensemble des solutions de (E) est $\mathcal{S} = \{7; 1\}$.

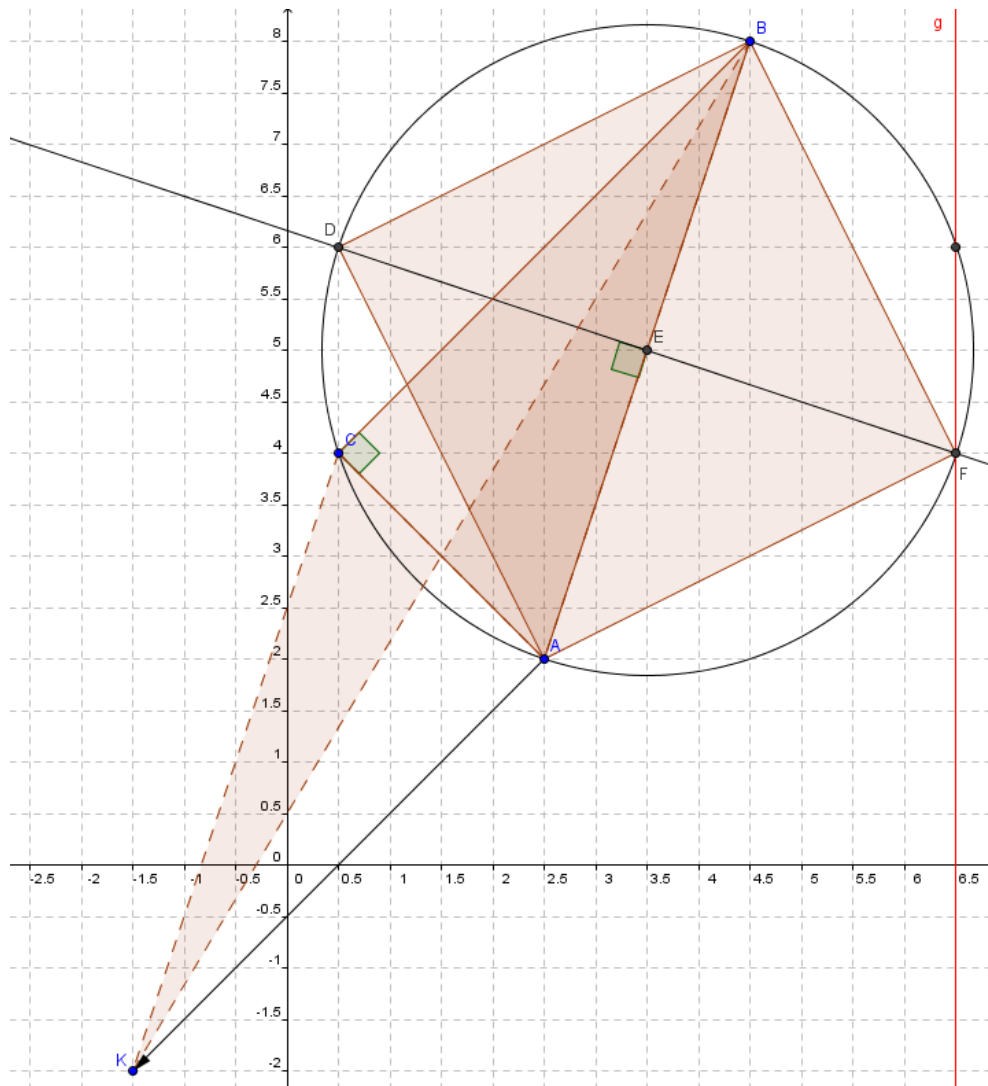
Exercice 4 :

Ce sont les mêmes questions que pour le sujet (a) mais dans un ordre différent et avec des réponses également ordonnées différemment : voir le sujet (a) pour les justifications.

1. La bonne réponse est la réponse a)
2. La bonne réponse est la réponse b)
3. La bonne réponse est la réponse b)
4. La bonne réponse est la réponse d)

Exercice 5

1. Figure :



$$2. \quad AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = \left(\frac{9}{2} - \frac{5}{2}\right)^2 + (8 - 2)^2 = 2^2 + 6^2 = 4 + 36 = 40$$

$$BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{9}{2}\right)^2 + (4 - 8)^2 = (-4)^2 + (-4)^2 = 16 + 16 = 32$$

$$AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{2}\right)^2 + (4 - 2)^2 = (-2)^2 + (2)^2 = 4 + 4 = 8.$$

On constate que $BC^2 + AC^2 = 32 + 8 = 40 = AB^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en C .

3. Comme ABC est rectangle en C alors il est inscrit dans le cercle de diamètre $[AB]$. Autrement dit, le cercle $\mathcal{C}$ a pour centre le milieu de $[AB]$ et pour rayon $r = \frac{AB}{2}$. Comme E est le milieu de $[AB]$,

$$x_E = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{\frac{5}{2} + \frac{9}{2}}{2} = \frac{14}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \text{ et } y_E = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2 + 8}{2} = 5. \text{ Ainsi, } E\left(\frac{7}{2}; 5\right). \text{ On a montré que}$$

$$AB^2 = 40 \text{ donc } AB = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ et } r = \frac{AB}{2} = \sqrt{10}.$$

4. On sait que $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{ED}$ donc E est le milieu de $[FD]$. De plus, E est le milieu de $[AB]$. Les diagonales de $ADBF$ se coupent en leur milieu donc c'est un parallélogramme.

De plus, D est sur la médiatrice de $[AB]$. Comme E est le milieu de $[AB]$ alors il se trouve aussi sur la médiatrice de $[AB]$. Finalement, la droite (DE) est la médiatrice de $[AB]$ donc (DE) est perpendiculaire à (AB) . Comme E est le milieu de $[DF]$ alors $(DE) = (DF)$ donc les diagonales de $ADBF$ sont perpendiculaires. Cela signifie que le parallélogramme $ADBF$ est un losange.

On sait que D est sur le cercle $\mathcal{C}$ et que E est à la fois le centre de $\mathcal{C}$ et le milieu de $[DF]$. Par conséquent, $[DF]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$. On a aussi montré que $[AB]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$. On en déduit que $DF = AB$ donc les diagonales de $ADBF$ sont de même longueur. Un losange dont les diagonales sont de même longueur est un carré. Finalement, $ADBF$ est un carré.

5. On cherche les points $M\left(\frac{13}{2}; y\right)$ qui se trouvent sur le cercle $\mathcal{C}$, c'est-à-dire qui vérifient $EM = \sqrt{10}$ ou encore $EM^2 = 10$.

$$EM^2 = (x_M - x_E)^2 + (y_M - y_E)^2 = \left(\frac{13}{2} - \frac{7}{2}\right)^2 + (y - 5)^2 = 3^2 + (y - 5)^2 = 9 + (y - 5)^2$$

Il nous faut donc résoudre :

$$9 + (y - 5)^2 = 10 \Leftrightarrow (y - 5)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (y - 5 - 1)(y - 5 + 1) = 0 \Leftrightarrow (y - 6)(y - 4) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. Cette équation équivaut donc à $y - 6 = 0$ ou $y - 4 = 0$ soit $y = 6$ ou $y = 4$. On trouve donc deux points : $M_1\left(\frac{13}{2}; 6\right)$ et $M_2\left(\frac{13}{2}; 4\right)$ (en fait $M_2 = F$).

6. (a) D'après la règle du parallélogramme, $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ équivaut à $BAKC$ est un parallélogramme. Cette information signifie que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AK}$.
- (b) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}$. On a vu que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AK}$. Comme $ADBF$ est un carré alors $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{FA}$. Ainsi, $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{EK}$.