CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLE N° 2

SUJET (a)

Question de cours

Une fonction f est croissante sur I signifie que pour tout couple $(x_1\,;\,x_2)$ de nombres appartenant à I, si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

Exercice 1 :

1. Si $x \in [0\,;\,2]$ alors $0 \leqslant x \leqslant 2$. Comme f est décroissante sur $[0\,;\,2]$ alors $f(0) \geqslant f(x) \geqslant f(2)$, autrement dit, $4 \geqslant f(x) \geqslant -5$, ce qui s'écrit encore : $\boxed{-5 \leqslant f(x) \leqslant 4}$.

2. (a) On sait que : $-\dfrac{5}{2} = -2,5$ d'où $-3 \leqslant -\dfrac{5}{2} < -2,1 \leqslant 0$. La fonction f est croissante sur $[-3\,;\,0]$ d'où $\boxed{f\left(-\dfrac{5}{2}\right) \leqslant f(-2,1)}$.

   (b) On sait que $-3 \leqslant -2,9 \leqslant 0$ et f est croissante sur $[-3\,;\,0]$ donc $f(-3) \leqslant f(-2,9) \leqslant f(0)$ soit $-1 \leqslant f(-2,9) \leqslant 4$. De plus, $0 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 2$ et f est décroissante sur $[0\,;\,2]$ donc $f(0) \geqslant f(\sqrt{2}) \geqslant f(2)$, c'est-à-dire $4 \geqslant f(\sqrt{2}) \geqslant -5$. Les encadrements obtenus pour $f(-2,9)$ et $f(\sqrt{2})$ ne nous permettent pas de comparer ces deux images.

   (c) On sait que $-3 \leqslant -1 \leqslant 0$ donc avec le même raisonnement que pour $f(-2,9)$ dans la question précédente, on peut en déduire que $-1 \leqslant f(-1) \leqslant 4$. De plus, $2 = \dfrac{6}{3}$ et $7 = \dfrac{21}{3}$ donc $2 \leqslant \dfrac{7}{3} \leqslant 7$. Comme f est croissante sur $[2\,;\,7]$ alors $f(2) \leqslant f\left(\dfrac{7}{3}\right) \leqslant f(7)$, soit $-5 \leqslant f\left(\dfrac{7}{3}\right) \leqslant -2$. On a obtenu : $f\left(\dfrac{7}{3}\right) \leqslant -2 < -1 \leqslant f(-1)$ d'où $\boxed{f\left(\dfrac{7}{3}\right) \leqslant f(-1)}$.

3. On constate d'après le tableau de variations (voir annexe) que la courbe $\mathcal{C}_f$ va couper l'axe des abscisses en deux points, l'un d'abscisse comprise entre -3 et 0 et l'autre d'abscisse comprise entre 0 et 2. Cela signifie que le nombre 0 admet deux antécédents par la fonction f.

4. (a) Si $k \in [-3\,;\,-2]$ alors $k \in [-5\,;\,4]$ et $k \in [-5\,;\,-2]$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ coupe la droite d'équation $y = k$ en deux points, l'un d'abscisse comprise entre 0 et 2 et l'autre d'abscisse comprise entre 2 et 7 (voir annexe pour justification sur le tableau de variations). Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions.

   (b) – D'après le tableau de variations, la plus petite image est -5 et la plus grande est 4 donc si $k < -5$ et si $k > 4$ alors l'équation $f(x) = k$ n'admet pas de solution.
   – Si $k = -5$ et si $k = 4$ alors l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution (respectivement $x = 2$ pour $k = -5$ et $x = 0$ pour $k = 4$).
   – Si $-5 < k \leqslant -2$, alors l'équation admet deux solutions (une sur $]0\,;\,2[$, l'autre sur $]2\,;\,7]$).
   – Si $-2 < k < -1$ alors l'équation $f(x) = k$ admet une seule solution sur $]0\,;\,2[$.
   – Si $-1 \leqslant k < 4$ alors l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions (une sur $[-3\,;\,0[$, l'autre sur $]0\,;\,2[$).

   Finalement, l'équation $f(x) = k$ admet une seule solution si k vaut -5 ou 4 ou bien si $k \in]-2\,;\,-1[$.

5. voir annexe

Exercice 2 :

1. (a) L'expression correspondante est $\dfrac{3}{(x-y)^2}$.

   (b) L'expression correspondante est $-a + 3b$

(c) L'expression correspondante est $\dfrac{2}{c}$

(d) L'expression correspondante est $\dfrac{1}{-2}\left(a+b^3\right)$

2. (a) A est la somme de 3 et de l'inverse de x.
   (b) B est la somme de 4 et du carré de la somme de x et de 2.
   (c) C est le quotient de l'opposé de x par la somme de 1 et du carré de x.
   (d) D est la moitié du produit de la différence de x et de y par la somme de l'inverse de y et du triple de x.

3. (a) $E=3(x-1)(a+5)$ convient.
   (b) $F=x(a+2)+2y^2$ convient.

4. (a) $G=(x-1)(x+1)+(2x-5)^2=x^2-1+(2x)^2-2\times 2x\times 5+5^2=x^2-1+4x^2-20x+25=5x^2-20x+24.$
   (b) $H=6(x+5)(3x-1)=(6x+30)(3x-1)=18x^2-6x+90x-30=18x^2+84x-30.$

5. (a) $I=x^2-7x=x(x-7).$
   (b) $J=(2x+3)^2-3x(2x+3)=(2x+3)(2x+3-3x)=(2x+3)(-x+3)$
   (c) $K=36x^2-121=(6x)^2-11^2=(6x-11)(6x+11).$
   (d)

$$\begin{aligned} L &= 9x^2-30x+25-(3x-5)=(3x)^2-2\times 3x\times 5+5^2-(3x-5)=(3x-5)^2-(3x-5)\\ &= (3x-5)(3x-5-1)=(3x-5)(3x-6)=3(3x-5)(x-2)\end{aligned}$$

Exercice 3 :

1. L'image de 0 par f est $f(0)=-2$.
2. Le nombre 4 admet un seul antécédent par f, qui vaut 5.
3. Tableau de signes de $f(x)$:

x	-3		-1		3		7		8
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

4. voir annexe pour les justifications sur le graphique
   (a) Les solutions de $f(x)\geqslant 3$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ dont l'ordonnée est supérieure ou égale à 3. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=[4\,;\,6]$.
   (b) On considère la fonction $g : x\mapsto 7-x$. Il s'agit d'une fonction affine donc $\mathcal{C}_g$ est une droite. Pour la tracer on calcule deux images par g : $g(3)=4$ donc $A\,(3\,;\,4)\in\mathcal{C}_g$; et $g(7)=0$ donc $B\,(7\,;\,0)\in\mathcal{C}_g$. Les solutions de l'inéquations $f(x)<7-x$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés strictement en-dessous de $\mathcal{C}_g$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=[-3\,;\,4[\cup]7\,;\,8]$.

5. (a) Tableau de variations :

x	-3		1		5		8
$f(x)$	2				4		
		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			-3				-2

6. Lorsque $6\leqslant x\leqslant 8$, comme f est décroissante sur $[5\,;\,8]$ alors $f(6)\geqslant f(x)\geqslant f(8)$ soit $3\geqslant f(x)\geqslant -2$. Ainsi, $f(x)\in[-2\,;\,3]$.

Exercice 4 :

Partie A

1. On recherche les valeurs interdites en résolvant $1+x=0 \;\Leftrightarrow\; x=-1$. L'ensemble de définition de f est donc $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

2. $f(-3) = \dfrac{8}{1-3} = \dfrac{8}{-2} = -4$ donc l'image de -3 par f est -4.
$f(\sqrt{5}) = \dfrac{8}{1+\sqrt{5}} = \dfrac{8(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \dfrac{8(1-\sqrt{5})}{1-5} = \dfrac{8(1-\sqrt{5})}{-4} = -2(1-\sqrt{5}) = -2+2\sqrt{5}$.

3. On résout $f(x) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{8}{x+1} = 2$ pour tout $x \neq -1$. Cette équation équivaut à :
$$\frac{8}{x+1} - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{8-2(x+1)}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{8-2x-2}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{6-2x}{x+1} = 0$$
Un quotient est nul lorsque son numérateur est nul d'où $6-2x = 0 \Leftrightarrow -2x = -6 \Leftrightarrow x = 3$. Le nombre 2 admet un unique antécédent par f qui vaut 3.

4. (a)
$$\begin{aligned} P(x) &= 8-2(1+x)^2 = 2\left[4-(1+x)^2\right] = 2\left[2-(1+x)\right]\left[2+(1+x)\right] = 2(2-1-x)(3+x) \\ &= 2(1-x)(3+x) \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} f(x) = 2x+2 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{8}{1+x} = 2x+2 \Leftrightarrow \frac{8}{1+x} - (2x+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{8-(2x+2)(1+x)}{1+x} = 0 \Leftrightarrow \frac{8-2(1+x)(1+x)}{1+x} = 0 \end{aligned}$$
Or $P(x) = 8-2(1+x)^2 = 8-2(1+x)(1+x)$ d'où $f(x) = 2x+2 \Leftrightarrow \dfrac{P(x)}{x+1} = 0$.

(c) On résout, pour $x \neq -1$, $\dfrac{P(x)}{x+1} = 0$. Un quotient est nul lorsque son numérateur est nul, on aboutit donc à $P(x) = 0 \Leftrightarrow 2(1-x)(3+x) = 0$ d'après la forme factorisée obtenue au a). En divisant par 2 chaque membre, cette équation équivaut à $(1-x)(3+x) = 0$. Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, c'est-à-dire : $1-x = 0$ ou $3+x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -3$. L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \{1\,;\,-3\}$.

Partie B

1. Comme l'ensemble de définition est $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, graphiquement, cela se traduit par le fait que la droite d'équation $x = -1$ ne coupe pas la courbe $\mathcal{C}_f$, autrement dit, il y aura une coupure dans $\mathcal{C}_f$ en l'abscisse -1.

2.

x	-9	-6	-5	-3	$-2,5$	-2	-1	0	0,5	1	2	3	4	7
$f(x)$	-1	$-1,6$	-2	-4	$\simeq -5,3$	-8	$\times$	8	$\simeq 5,3$	4	$\simeq 2,7$	2	1,6	1

voir annexe pour la courbe

3. (a) Les solutions de $f(x) = 2$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ qui ont une ordonnée égale à 2. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{3\}$.

(b) Les solutions de $f(x) \geqslant -4$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ qui ont une ordonnée supérieur ou égale à -4. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =]-\infty\,;\,-3] \cup]-1\,;\,+\infty[$.

(c) Pour résoudre graphiquement $f(x) = 2x+2$, on doit représenter la fonction $g : x \mapsto 2x+2$. C'est une fonction affine donc $\mathcal{C}_g$ est une droite. Comme $g(0) = 2$ alors $A\,(0\,;\,2) \in \mathcal{C}_g$.
De plus, $g(4) = 2\times 4+2 = 10$ donc $B\,(4\,;\,10) \in \mathcal{C}_g$. Les solutions de $f(x) = 2x+2$ sont alors les abscisses des points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-3\,;\,1\}$.

Partie C

1. L'aire du triangle est $\mathcal{A} = \dfrac{BC \times AH}{2}$ avec $BC = BH + HB + C = 1 + x$ et $AH = h$. Ainsi, $\mathcal{A} = \dfrac{h(1+x)}{2}$.

2. On sait d'après l'énoncé que $\mathcal{A} = 4$ donc $\dfrac{h(1+x)}{2} = 4 \Leftrightarrow h(1+x) = 8 \Leftrightarrow h = \dfrac{8}{1+x}$ (on peut diviser par $1+x$ qui est non nul car x est un nombre positif (longueur).

3. (a) $h = 2$ signifie que $\dfrac{8}{1+x} = 2$. Or, on remarque que $\dfrac{8}{1+x} = f(x)$ donc on aboutit à l'équation $f(x) = 2$, que l'on a résolu par le calcul dans la partie A et graphiquement dans la partie B. On obtient que $x = 3$. La hauteur mesure 2 cm pour $x = 3$ cm.

(b) Le double de la base est le nombre $2\,BC = 2(1+x) = 2x+2$. Il s'agit donc de déterminer x tel que $h = 2x+2 \Leftrightarrow \dfrac{8}{1+x} = 2x+2 \Leftrightarrow f(x) = 2x+2$. On a résolu cette équation par le calcul dans la partie A et graphiquement dans la partie B et on a obtenu que $x = -3$ ou $x = 1$. Or, la valeur $x = -3$ n'est pas envisageable puisque x est une longueur donc un nombre positif. Par conséquent, pour que la hauteur soit égale au double de la base il faut choisir $x = 1$ cm.

SUJET (b)

Question de cours

Une fonction f est décroissante sur I signifie que pour tout couple $(x_1\,;\,x_2)$ de nombres appartenant à I, si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

Exercice 1 :

1. Si $x \in [0\,;\,4]$ alors $0 \leqslant x \leqslant 4$. Comme f est décroissante sur $[0\,;\,4]$ alors $f(0) \geqslant f(x) \geqslant f(4)$, autrement dit, $6 \geqslant f(x) \geqslant 2$, ce qui s'écrit encore : $\boxed{2 \leqslant f(x) \leqslant 6}$.

2. (a) On sait que : $-\dfrac{3}{2} = -1,5$ d'où $-3 \leqslant -\dfrac{3}{2} < -1,2 \leqslant 0$. La fonction f est croissante sur $[-3\,;\,0]$ d'où $\boxed{f\left(-\dfrac{3}{2}\right) \leqslant f(-1,2)}$.

   (b) On sait que $-3 \leqslant -\sqrt{3} \leqslant 0$ et f est croissante sur $[-3\,;\,0]$ donc $f(-3) \leqslant f(-\sqrt{3}) \leqslant f(0)$ soit $-4 \leqslant f(-\sqrt{3}) \leqslant 6$. De plus, $-5 \leqslant -4,8 \leqslant -3$ et f est décroissante sur $[-5\,;\,-3]$ donc on en déduit que $f(-5) \geqslant f(-4,8) \geqslant f(-3)$, c'est-à-dire $1 \geqslant f(-4,8) \geqslant -4$. Les encadrements obtenus pour $f(-\sqrt{3})$ et $f(-4,8)$ ne nous permettent pas de comparer ces deux images.

   (c) On sait que $-5 \leqslant -4 \leqslant -3$ donc avec le même raisonnement que pour $f(-4,8)$ dans la question précédente, on peut en déduire que $-4 \leqslant f(-4) \leqslant 1$. De plus, $4 = \dfrac{20}{5}$ donc $0 \leqslant \dfrac{13}{5} \leqslant 4$. Comme f est décroissante sur $[0\,;\,4]$ alors $f(0) \geqslant f\left(\dfrac{13}{5}\right) \geqslant f(4)$, soit $6 \geqslant f\left(\dfrac{13}{5}\right) \geqslant 2$. On a obtenu : $f(-4) \leqslant 1 < 2 \leqslant f\left(\dfrac{13}{5}\right)$ d'où $\boxed{f(-4) \leqslant f\left(\dfrac{13}{5}\right)}$.

3. On constate d'après le tableau de variations (voir annexe) que la courbe $\mathcal{C}_f$ va couper l'axe des abscisses en deux points, l'un d'abscisse comprise entre -5 et -3 et l'autre d'abscisse comprise entre -3 et 0. Cela signifie que le nombre 0 admet deux antécédents par la fonction f.

4. (a) Si $k \in [3\,;\,4]$ alors $k \in [-4\,;\,6]$ et $k \in [2\,;\,6]$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ coupe la droite d'équation $y = k$ en deux points, l'un d'abscisse comprise entre -3 et 0 et l'autre d'abscisse comprise entre 0 et 4 (voir annexe pour justification sur le tableau de variations). Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions.

   (b) – D'après le tableau de variations, la plus petite image est -4 et la plus grande est 6 donc si $k < -4$ et si $k > 6$ alors l'équation $f(x) = k$ n'admet pas de solution.
   – Si $k = -4$ et si $k = 6$ alors l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution (respectivement $x = -3$ pour $k = -4$ et $x = 0$ pour $k = 6$).
   – Si $-4 < k \leqslant 1$, alors l'équation admet deux solutions (une sur $[-5\,;\,-3[$, l'autre sur $]-3\,;\,0[$).
   – Si $1 < k < 2$ alors l'équation $f(x) = k$ admet une seule solution sur $]-3\,;\,0[$.
   – Si $2 \leqslant k < 6$ alors l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions (une sur $]-3\,;\,0[$, l'autre sur $]0\,;\,4]$).

   Finalement, l'équation $f(x) = k$ admet une seule solution si k vaut -4 ou 6 ou bien si $k \in]1\,;\,2[$.

5. voir annexe

Exercice 2 :

1. (a) L'expression correspondante est $-x + 3y$.

   (b) L'expression correspondante est $\dfrac{2}{(a-b)^2}$

   (c) L'expression correspondante est $\dfrac{2}{x}$

   (d) L'expression correspondante est $\dfrac{1}{-3}\left(x + y^3\right)$

2. (a) A est la somme de 5 et de l'inverse de y.
   (b) B est la somme de 3 et du carré de la somme de a et de 2.
   (c) C est le quotient de la somme de 1 et du carré de a par l'opposé de a.
   (d) D est le tiers du produit de la différence de y et de c par la somme de l'inverse de x et du triple de y.

3. (a) $E = 3 + 2x^2 + c$ convient.
   (b) $F = (x + 5y)(a^2 + 2)$ convient.

4. (a) $G = (x-2)(x+2)+(5x-3)^2 = x^2-4+(5x)^2-2\times 5x\times 3+3^2 = x^2-4+25x^2-30x+9 = 26x^2-30x+5$.
   (b) $H = 5(x + 3)(6x - 1) = (5x + 15)(6x - 1) = 30x^2 - 5x + 90x - 15 = 30x^2 + 85x - 15$.

5. (a) $I = 5x - x^2 = x(5 - x)$.
   (b) $J = (3x + 2)^2 - 4x(3x + 2) = (3x + 2)(3x + 2 - 4x) = (3x + 2)(-x + 2)$
   (c) $K = 64x^2 - 81 = (8x)^2 - 9^2 = (8x - 9)(8x + 9)$.
   (d)

$$\begin{aligned} L &= 4x^2 - 28x + 49 - (2x - 7) = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 7 + 7^2 - (2x - 7) = (2x - 7)^2 - (2x - 7) \\ &= (2x - 7)(2x - 7 - 1) = (2x - 7)(2x - 8) = 2(2x - 7)(x - 4) \end{aligned}$$

Exercice 3 :

1. L'image de 3 par f est $f(3) = 0$.
2. Le nombre -3 admet un seul antécédent par f, qui vaut 1.
3. Tableau de signes de $f(x)$:

x	-3		-1		3		7		8
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

4. voir annexe pour les justifications sur le graphique
   (a) Les solutions de $f(x) > -2$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ dont l'ordonnée est strictement supérieure à -2. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = [-3\,;\,0[\cup]2\,;\,8[$.
   (b) On considère la fonction $g : x \mapsto -x + 7$. Il s'agit d'une fonction affine donc $\mathcal{C}_g$ est une droite. Pour la tracer on calcule deux images par g : $g(3) = 4$ donc $A\,(3\,;\,4) \in \mathcal{C}_g$; et $g(7) = 0$ donc $B\,(7\,;\,0) \in \mathcal{C}_g$. Les solutions de l'inéquations $f(x) \geqslant -x + 7$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés au-dessus ou sur $\mathcal{C}_g$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = [4\,;\,7]$.

5. (a) Tableau de variations :

x	-3		1		5		8
$f(x)$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2

6. Lorsque $-3 \leqslant x \leqslant 0$, comme f est décroissante sur $[-3\,;\,1]$ alors $f(-3) \geqslant f(x) \geqslant f(0)$ soit $2 \geqslant f(x) \geqslant -2$. Ainsi, $f(x) \in [-2\,;\,2]$.

Exercice 4 :

Partie A

1. On recherche les valeurs interdites en résolvant $1 + x = 0 \iff x = -1$. L'ensemble de définition de f est donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
2. $f(-3) = \dfrac{12}{1-3} = \dfrac{12}{-2} = -6$ donc l'image de -3 par f est -6.
   $f(\sqrt{7}) = \dfrac{12}{1+\sqrt{7}} = \dfrac{12(1-\sqrt{7})}{(1+\sqrt{7})(1-\sqrt{7})} = \dfrac{12(1-\sqrt{7})}{1-7} = \dfrac{12(1-\sqrt{7})}{-6} = -2(1-\sqrt{7}) = -2+2\sqrt{7}$.

3. On résout $f(x)=4 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{12}{x+1}=4$ pour tout $x\neq -1$. Cette équation équivaut à :

$$\frac{12}{x+1}-4=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{12-4(x+1)}{x+1}=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{12-4x-4}{x+1}=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{8-4x}{x+1}=0$$

Un quotient est nul lorsque son numérateur est nul d'où $8-4x=0 \;\Leftrightarrow -4x=-8 \;\Leftrightarrow\; x=2$. Le nombre 4 admet un unique antécédent par f qui vaut 2.

4. (a)

$$\begin{aligned} P(x) &= 12-3(1+x)^2=3\left[4-(1+x)^2\right]=3\left[2-(1+x)\right]\left[2+(1+x)\right]=3(2-1-x)(3+x)\\ &= 3(1-x)(3+x)\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f(x)=3x+3 &\;\Leftrightarrow\; \frac{12}{1+x}=3x+3 \;\Leftrightarrow\; \frac{12}{1+x}-(3x+3)=0\\ &\;\Leftrightarrow\; \frac{12-(3x+3)(1+x)}{1+x}=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{12-3(1+x)(1+x)}{1+x}=0\end{aligned}$$

Or $P(x)=12-3(1+x)^2=12-3(1+x)(1+x)$ d'où $f(x)=3x+3 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{P(x)}{x+1}=0$.

(c) On résout, pour $x\neq -1$, $\dfrac{P(x)}{x+1}=0$. Un quotient est nul lorsque son numérateur est nul, on aboutit donc à $P(x)=0 \;\Leftrightarrow\; 3(1-x)(3+x)=0$ d'après la forme factorisée obtenue au a). En divisant par 3 chaque membre, cette équation équivaut à $(1-x)(3+x)=0$. Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, c'est-à-dire : $1-x=0$ ou $3+x=0 \;\Leftrightarrow\; x=1$ ou $x=-3$. L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S}=\{1\,;\,-3\}$.

Partie B

1. Comme l'ensemble de définition est $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, graphiquement, cela se traduit par le fait que la droite d'équation $x=-1$ ne coupe pas la courbe $\mathcal{C}_f$, autrement dit, il y aura une coupure dans $\mathcal{C}_f$ en l'abscisse -1.

2.

x	-9	-7	-5	-4	3	$-2,5$	-2	-1	0	$0{,}5$	1	2	3	5	7
$f(x)$	$-1{,}5$	-2	-3	-4	-6	-8	-12	$\times$	12	8	6	4	3	2	$1{,}5$

voir annexe pour la courbe

3. (a) Les solutions de $f(x)=4$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ qui ont une ordonnée égale à 4. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\{2\}$.

(b) Les solutions de $f(x)\geqslant -3$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ qui ont une ordonnée supérieur ou égale à -3. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=]-\infty\,;\,-5]\cup]-1\,;\,+\infty[$.

(c) Pour résoudre graphiquement $f(x)=3x+3$, on doit représenter la fonction $g:x\mapsto 3x+3$. C'est une fonction affine donc $\mathcal{C}_g$ est une droite. Comme $g(0)=3$ alors $A\,(0\,;\,3)\in\mathcal{C}_g$.
De plus, $g(3)=3\times3+3=12$ donc $B\,(3\,;\,12)\in\mathcal{C}_g$. Les solutions de $f(x)=3x+3$ sont alors les abscisses des points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\{-3\,;\,1\}$.

Partie C

1. L'aire du triangle est $\mathcal{A}=\dfrac{BC\times AH}{2}$ avec $BC=BH+HB+C=1+x$ et $AH=h$. Ainsi, $\mathcal{A}=\dfrac{h(1+x)}{2}$.

2. On sait d'après l'énoncé que $\mathcal{A}=6$ donc $\dfrac{h(1+x)}{2}=6 \;\Leftrightarrow\; h(1+x)=12 \;\Leftrightarrow\; h=\dfrac{12}{1+x}$ (on peut diviser par $1+x$ qui est non nul car x est un nombre positif (longueur).

3. (a) $h=4$ signifie que $\dfrac{12}{1+x}=4$. Or, on remarque que $\dfrac{12}{1+x}=f(x)$ donc on aboutit à l'équation $f(x)=4$, que l'on a résolu par le calcul dans la partie A et graphiquement dans la partie B. On obtient que $x=2$. La hauteur mesure 4 cm pour $x=2$ cm.

(b) Le triple de la base est le nombre $3\,BC = 3(1+x) = 3x+3$. Il s'agit donc de déterminer x tel que $h = 3x+3 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{12}{1+x} = 3x+3 \;\Leftrightarrow\; f(x) = 3x+3$. On a résolu cette équation par le calcul dans la partie A et graphiquement dans la partie B et on a obtenu que $x = -3$ ou $x = 1$. Or, la valeur $x = -3$ n'est pas envisageable puisque x est une longueur donc un nombre positif. Par conséquent, pour que la hauteur soit égale au triple de la base il faut choisir $x = 1$ cm.