Lycée J.P Vernant — Année scolaire 2010-2011
spéTS — Mathématiques

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLE N° 1

SUJET (a)

Exercice 1 :

1. (a) Comme a divise $(n-1)$ et (n^2+n+3), il divise aussi $(n^2+n+3)-n(n-1)$.
   Or, $(n^2+n+3)-n(n-1) = n^2+n+3-n^2+n = 2n+3$ d'où $a \mid 2n+3$.

   (b) On sait que a divise $(n-1)$ et $(2n+3)$, donc a divise $(2n+3)-2(n-1) = 2n+3-2n+2 = 5$. Le nombre 5 étant un nombre premier, ses seuls diviseurs positifs sont 1 et 5. Or, a est un diviseur positif (car $a \in \mathbb{N}$) de 5, donc les valeurs possibles du nombre a sont 1 et 5.

2. On pose la division de 205362 par 43.

```
 205362  | 43
(-172)   |------
  333    | 4775
 -(301)  |
   326   |
  -(301) |
    252  |
   -(215)|
     37  |
```

On obtient donc $205362 = 4775 \times 43 + 37$. Par conséquent :
$-205362 = -4775 \times 43 - 37 = -4775 \times 43 - 43 + 6 = -4776 \times 43 + 6$.
Comme $0 \leqslant 6 < 43$, alors 6 est le reste de la division euclidienne de -205362 par 43 et (-4776) est son quotient.

3. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété P_n : "$4^n - 1 - 3n$ est divisible par 9".
   - *Initialisation* : Pour $n = 0$, $4^n - 1 - 3n = 4^0 - 1 = 0$. Comme 0 est divisible par 9 $(0 = 9 \times 0)$ alors la propriété P_0 est vraie.
   - *Etape d'hérédité* : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose P_n vraie, c'est-à-dire que $4^n - 1 - 3n$ est divisible par 9.
     Montrons que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que $4^{n+1} - 1 - 3(n+1)$ est divisible par 9.
     D'après P_n, il eciste $k \in \mathbb{Z}$ tel que $4^n - 1 - 3n = 9k$ ou encore $4^n = 9k + 1 + 3n$. Alors :
     $$4^{n+1}-1-3(n+1) = 4\times4^n-1-3n-3 = 4(9k+1+3n)-4-3n = 36k+4+12n-4-3n = 36k+9n = 9(4k+1)$$
     Comme $(4k+1) \in \mathbb{Z}$, alors 9 divise $4^{n+1} - 1 - 3(n+1)$, donc P_{n+1} est vraie.
   - *Conclusion* : D'après le principe de récurrence, $4^n - 1 - 3n$ est divisible par 9 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. (a) $A = 9n^2 - 3 = 3(3n^2 - 1) + 0$. Comme $3n^2 - 1 \in \mathbb{Z}$ et $0 \leqslant 0 < 3$, alors le reste de la division euclidienne de A par 3 est égal à 0.

   (b) $A = 9(n^2 - 1) + 9 - 3 = 9(n^2 - 1) + 6$. Comme $n^2 - 1 \in \mathbb{Z}$ et que $0 \leqslant 6 < 9$ alors le reste de la division euclidienne de A par 9 est égal à 6.

   (c) $A = 9n^2 - n + n - 3 = n(9n-1) + n - 3$. Cherchons pour quelles valeurs de n on a : $0 \leqslant n - 3 < n$.
   L'inégalité $n - 3 < n$ est toujours vraie donc l'encadrement précédent est valable pour tout $n \geqslant 3$.
   Comme $(9n-1) \in \mathbb{Z}$, on peut alors conclure que si $n \geqslant 3$, le reste de la division euclidienne de A par n vaut $n - 3$.
   Dans l'énoncé, on suppose que $n \geqslant 2$, il nous reste donc à traiter le cas $n = 2$. On a alors $A = 9 \times 4 - 3 = 33 = 2 \times 16 + 1$. Comme $0 \leqslant 1 < 2$, le reste de la division euclidienne de $A = 33$ par $n = 2$ vaut 1.

   (d) $A = 9(n^2 - 1) + 9 - 3 = 9(n^2 - 1) + 6$. Cherchons pour quelles valeurs de n on a $0 \leqslant 6 < n^2 - 1$.
   Cela revient à réspoudre $n^2 > 7$. Dès que $n \geqslant 3$, alors $n^2 \geqslant 9$ (car la fonction carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[)$ et donc $n^2 > 7$. Ainsi, si $n \geqslant 3$, vu que $n^2 - 1 \in \mathbb{Z}$, on peut affirmer que le reste de la division euclidienne de A par $n^2 - 1$ vaut 6.
   On traite à part le cas $n = 2$ pour lequel $A = 33$ et $n^2 - 1 = 3$. Comme $33 = 3 \times 11 + 0$, alors le reste de la division euclidienne de A par $n^2 - 1$ est égal à 0 pour $n = 2$.

5. (a) Comme $N = \overline{mcdu}$ en base 10, cela signifie que $N = m\times 10^3 + c\times 10^2 + d\times 10 + u$. Or $10 \equiv -1\ [11]$ pusique $10+1 = 11$ est un mutiple de 11. On en déduit que $10^2 \equiv (-1)^2\ [11]$ soit $10^2 \equiv 1\ [11]$ puis que $10^3 \equiv (-1)^3\ [11]$ soit $10^3 \equiv -1\ [11]$. Par conséquent : $N \equiv m\times(-1) + c\times 1 + d\times(-1) + u\ [11]$, ce qui s'écrit encore $N \equiv -m + c - d + u\ [11]$.

   (b) De la même façon, $M = \overline{udcm} = u \times 10^3 + d \times 10^2 + c \times 10 + m$.
   Ainsi, $M \equiv u \times (-1) + d \times 1 + c \times (-1) + m\ [11]$ soit $M \equiv -u + d - c + m\ [11]$.
   On peut additionner les deux relations concernant N et M : $N + M \equiv -m + c - d + u - u + d - c + m\ [11]$ donc $N + M \equiv 0\ [11]$. On en déduit que $N + M$ est divisible par 11.

   (c) On choisit $N = 1426$. Alors $M = 6241$ et $N + M = 7667$. D'après les questions précédentes, 7667 est nécessairement un multiple de 11.

6. (a) On appelle n le nombre de marches de l'escalier. Comme Arthur monte les marches trois par trois et qu'il lui en reste deux à la fin, alors $n \equiv 2\ [3]$. Ainsi, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2 + 3k$.
   On sait que $80 \leqslant n \leqslant 90$ soit $80 \leqslant 2 + 3k \leqslant 90 \Leftrightarrow 78 \leqslant 3k \leqslant 88 \Leftrightarrow \frac{78}{3} \leqslant k \leqslant \frac{88}{3}$. Comme $\frac{78}{3} = 26$ et $29 = \frac{87}{3} < \frac{88}{3} < \frac{90}{3} = 30$ alors les seules valeurs possibles pour k sont 26,27,28, et 29.
   Or, le nombre k correspond au nombre de pas (sans le dernier de deux marches) faits par Arthur donc avant de gravir les deux dernières marches, Arthur a fait 26, 27, 28 ou 29 pas. Les valeurs de n correspondantes sont $n = 3 \times 26 + 2 = 80$ ou $n = 3 \times 27 + 2 = 83$ ou $n = 3 \times 28 + 2 = 86$ ou $n = 3 \times 29 + 2 = 89$.

   (b) Comme Claire monte les marches quatre par quatre et qu'il en reste trois à la fin, $n \equiv 3\ [4]$. Cherchons par les valeurs de n obtenues à la question précédentes, celles qui vérifient cette propriété.
   Pour $n = 80$, alors $n - 3 = 77$ n'est pas divisible par 4 donc 80 n'est pas congru à 3 modulo 4.
   Pour $n = 83$, $n - 3 = 80 = 4 \times 20$ est divisible par 4. Ainsi, $83 \equiv 3\ [4]$.
   Pour $n = 86$, $n - 3 = 83$ n'est pas divisible par 4 donc 86 n'est pas congru à 3 modulo 4.
   Pour $n = 89$, $n - 3 = 86 = 2 \times 43$. Comme 43 n'est pas pair, 86 n'est pas un multiple de 4 et 89 n'est pas congru à 3 modulo 4.
   Parmi les quatre valeurs possibles de n obtenues précédemmment, seule $n = 83$ convient. On peut donc conclure que l'escalier comporte 83 marches. De plus, $83 = 20 \times 4 + 3$ donc Claire a fait 20 pas si on ne compte pas les trois dernières marches montées.

Exercice 2 :

1. La phrase est **fausse**.
   Par exemple, 12 est divisible par 4 et par 6 mais il n'est pas divisible par 24.

2. La phrase est **fausse**.
   Par exemple, $10 \equiv 4\ [6]$ (puisque $10 - 4 = 6$ est un multiple de 6). Mais $\frac{10}{2} = 5$ n'est pas congru à 2 modulo 6 puisque $5 - 2 = 3$ n'est pas un multiple de 6. On a trouvé un contre-exemple en prenant $a = 10$ et $n = 6$.

3. (a) La phrase est **fausse**.
   Par exemple, $19 \equiv -5\ [12]$ (en effet, $19 + 5 = 24$ est un multiple de 12. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $19 = 12 - 5k$, c'est-à-dire que $-5k = 7$ ou encore $k = -\frac{7}{5}$.
   Or, $-\frac{7}{5} \notin \mathbb{Z}$ donc on aboutit à une contradiction. Ainsi, il n'existe pas $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 12 - 5k$.

   (b) La phrase est **vraie**.
   En effet, comme $a \equiv -5\ [12]$, alors 12 est un diviseur de $a + 5$. Comme 2 est lui-même un diviseur de 12, par transitivité, 2 est un diviseur de $a + 5$; autrement dit, $5 + a$ est pair.

   (c) La phrase est **vraie**.
   Comme $-5 \equiv 7\ [12]$ (car $-5 - 7 = -12$ est un multiple de 12) alors, par transitivité, $a \equiv 7\ [12]$. Ainsi, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 7 + 12k$.

4. $6300 = 63\times 100 = 3^2\times 7\times (2\times 5)^2 = 2^2\times 3^2\times 5^2\times 7$ est la décomposition en produit de facteurs premiers de 6300. D'après le cours, on sait alors que 6300 admet $(2+1)\times(2+1)\times(2+1)\times(1+1) = 2\times 3^3 = 54$ diviseurs positifs donc en tout $2\times 54 = 108$ diviseurs.

5. La phrase est **vraie**
On raisonne par distinction de cas modulo 3.
   - Si $n \equiv 0$ [3], alors par produit, $n(n+1)(2n+1) \equiv 0$ [3]
   - Si $n \equiv 1$ [3], alors $2n+1 \equiv 2+1$ [3]. Or, $3 \equiv 0$ [3] d'où $2n+1 \equiv 0$ [3] puis $n(n+1)(2n+1) \equiv 0$ [3].
   - Si $n \equiv 2$ [3], alors $n+1 \equiv 3$ [3] donc $n+1 \equiv 0$ [3] puis $n(n+1)(2n+1) \equiv 0$ [3].

   Dans tous les cas, on a obtenu que $n(n+1)(2n+1) \equiv 0$ [3], c'est-à-dire que $n(n+1)(2n+1)$ est un multiple de 3.

6. La phrase est **fausse**.
Par exemple, $2 \equiv 5$ [3] (puisque $2-5 = -3$ est un multiple de 3). Le reste de la division euclidienne de 2 par 3 ne peut pas valoir 5 puisque ce reste doit être strictement inférieur à 2. On a donc trouvé un contre-exemple en choisissant $a = 2$ et $n = 3$.

7. La phrase est **fausse**.
On choisit $a = 3$ et $b = 5$. Alors $9 \equiv 4$ [5] (car $9-4 = 5$ est un multiple de 5). Comme $a-2 = 3-2 = 1$ n'est pas divisible par 5, alors a n'est pas congru à 2 modulo 5.

Exercice 3 :

1. (a) Dire que $a \equiv b$ [7] signifie que a et b ont le même reste dans la division euclidienne par 7. Une caractérisation de cette congruence est : $a \equiv b$ [7] $\Leftrightarrow$ 7 est un diviseur de $a-b$

   (b) On suppose que $a \equiv b$ [7]. Cela signifie qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b+7k$. De même, on sait que $c \equiv d$ [7] donc il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $c = d+7k'$. Ainsi,

   $$ac = (b+7k)(d+7k') = bd + 7k'b + 7kd + 49kk' = bd + 7(k'b + kd + 7kk')$$

   Comme $(k'b+kd+7kk') \in \mathbb{Z}$, alors $ac \equiv bd$ [7].

   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle P_n la propriété "$a^n \equiv b^n$ [7]".
   - *Initialisation* Pour $n = 0$, $a^0 = 1$ et $b^0 = 1$ donc $a^0 \equiv b^0$ [7]. La propriété P_0 est vraie.
   - *Etape d'hérédité* Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que P_n est vraie, c'est-à-dire que $a^n \equiv b^n$ [7]. Montrons que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que $a^{n+1} \equiv b^{n+1}$ [7]. Comme $a^n \equiv b^n$ [7] et $a \equiv b$ [7], alors par produit $a^n \times a \equiv b^n \times b$ [7], ou encore $a^{n+1} \equiv b^{n+1}$ [7]. La propriété P_{n+1} est donc vraie.
   - *Conclusion* D'après le principe de récurrence, $a^n \equiv b^n$ [7] pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. (a) Si $a = 2$, alors $a^2 = 4$ n'est pas congru à 1 modulo 7 mais $a^3 = 8 \equiv 1$ [7] (car $8-1 = 7$ est un multiple de 7). Pour $a = 2$, le nombre $n = 3$ convient.
Si $a = 3$, alors $a^2 = 9 \equiv 2$ [7] (car $9-2 = 7$ est un multiple de 7). Ainsi, $a^6 = (a^2)^3 \equiv 2^3$ [7]. Or, $2^3 \equiv 1$ [7] d'après ce qui précède. Ainsi, $a^6 \equiv 1$ [7]. Pour $a = 3$, le nombre $n = 6$ convient.

   (b) On raisonne modulo 7 : si a n'est pas divisible par 7, cela signifie qu'il peut être égal à 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 modulo 7.
   - Si $a \equiv 1$ [7], alors $a^6 \equiv 1^6$ [7] soit $a^6 \equiv 1$ [7].
   - Si $a \equiv 2$ [7] alors $a^6 \equiv 2^6$ [7]. On a déjà justifié à la question précédente que $2^3 \equiv 1$ [7] d'où $2^6 = (2^3)^2 \equiv 1^2$ [7] soit $2^6 \equiv 1$ [7]. Par transitivité, on en déduit que $a^6 \equiv 1$ [7].
   - Si $a \equiv 3$ [7], alors $a^6 \equiv 3^6$ [7]. On a déjà remarqué que $3^6 \equiv 1$ [7] donc $a^6 \equiv 1$ [7] par transitivité.
   - Si $a \equiv 4$ [7], vu que $4 \equiv (-3)$ [7] (car $4+3 = 7$ est un multiple de 7) alors $a^6 \equiv (-3)^6$ [7]. Or, $(-3)^6 = 3^6 \equiv 1$ [7] d'où $a^6 \equiv 1$ [7] par transitivité.
   - Si $a \equiv 5$ [7], comme $5 \equiv -2$ [7] (car $5+2 = 7$ est un multiple de 7) alors $a^6 \equiv (-2)^6$ [7]. Or, $(-2)^6 = 2^6 \equiv 1$ [7] donc $a^6 \equiv 1$ [7] par transitivité.
   - Si $a \equiv 6$ [7], en utilisant que $6 \equiv -1$ [7] (car $6+1 = 7$ est un multiple de 7), on obtient que $a^6 \equiv (-1)^6$ [7] soit $a^6 \equiv 1$ [7].

   On a ainsi justifié que pour tout nombre a non divisible par 7 , $a^6 \equiv 1$ [7].

3. (a) Comme r est le reste de la division euclidienne de k par 6 alors il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $6 = kq + r$ avec $0 \leqslant r < k$. Comme k est le plus petit entier naturel tel que $a^k \equiv 1$ [7] et que $a^6 \equiv 1$ [7] d'après la question 2.b), alors $k \leqslant 6$ donc $r < 6$ et $kq = 6 - r > 0$. Or, $k \in \mathbb{N}^*$ par définition donc $q > 0$. De plus, $a^6 = a^{kq+r} = a^{kq} \times a^r = (a^k)^q \times a^r$. On sait que $a^k \equiv 1$ [7] d'où $(a^k)^q \equiv 1^q$ [7]. Comme $a^r \equiv N$ [7] donc $a^6 \equiv N$ [7]. Comme on sait que $a^6 \equiv 1$ [7], alors $N \equiv 1$ [7] par transitivité. N appartient à $[0\ ; 6]$; le seul nombre de cet intervalle congru à 1 modulo 7 est le nombre 1. Ainsi, $N = 1$. Comme $a^r \equiv 1$ [6] et que $r < k$, alors $r = 0$ puisque k est le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1$ [7]. Comme $r = 0$, $6 = kq$, autrement dit k divise 6. Les diviseurs positifs de $6 = 2 \times 3$ sont les nombres de l'ensemble $D^+(6) = \{1\,;2\,;3\,;6\}$ donc les valeurs possibles de k sont : 1, 2, 3 et 6.

   (b) – *Pour le nombre 2* :
   2 n'est pas congru à 1 modulo 7 donc $k \neq 1$; $2^2 = 4$ n'est pas congru à 1 modulo 7 donc $k \neq 2$; $2^3 \equiv 1$ [7] donc $k = 3$.

   – *Pour le nombre 3* :
   3 n'est pas congru à 1 modulo 7 ; $3^2 = 9$ n'est pas congru à 1 modulo 7 (car $9 - 1$ n'est pas un multiple de 7) ; $3^3 = 27$ n'est pas congru à 1 modulo 7 (car $27 - 1 = 26$ n'est pas un mutiple de 7) ; $3^4 = 9^2 \equiv 2^2$ [7]. Comme 4 n'est pas congru à 1 modulo 7, il en est de même de 3^4. Enfin, $3^5 = 3^4 \times 3 \equiv 4 \times 3$ [7]. Comme 12 n'est pas congru à 1 modulo 7, il en est de même de 3^5. Finalement, $k = 6$.

   – *Pour le nombre 4* :
   4 n'est pas congru à 1 modulo 7 ; $4^2 = 16$ n'est pas congru à 1 modulo 7 car $16 - 1 = 15$ n'est pas un multiple de 7 ; $4^3 = (2^2)^3 = 2^6$. Comme $2^6 \equiv 1$ [7], alors $k = 3$.

   – *Pour le nombre 5* :
   5 n'est pas congru à 1 modulo 7, $5^2 \equiv (-3)^2$ [6]. Or $(-3)^2 = 3^2$. Comme l'ordre de 3 n'est pas 2, il en est de même pour l'ordre de 5. De plus, $5^3 = 5^2 \times 5 \equiv 9 \times 5$ [7]. Vu que $45 - 1 = 44$ n'est pas un multiple de 7, alors 5^3 n'est pas congru à 1 modulo 7. $5^4 \equiv (-3)^4$ [7]. Comme 3^4 n'est pas congru à 1 modulo 7 (voir ordre du nombre 3), il en est de même de 5^4. Enfin, $5^5 = 5^4 \times 5$ et $5^4 \equiv 3^4$ [7]. Or, $3^4 \equiv 4$ [7] (montré avant) donc $5^5 \equiv 4 \times 5$ [7]. Comme $20 - 1$ n'est pas un mutiple de 7, 5^5 n'est pas congru à 1 modulo 7. Par conséquent, $k = 6$.

   – *Pour le nombre 6* :
   6 n'est pas congru à 1 modulo 7 ; $6 \equiv -1$ [7] donc $6^2 \equiv (-1)^2$ [7]. Comme $6^2 \equiv 1$ [7], alors $k = 2$.

4. On sait que $4 \equiv -3$ [7], $5 \equiv -2$ [7] et $+ \equiv -1$ [7] donc $A_n \equiv 2^n + 3^n + (-2)^n + (-3)^n + (-1)^n$ [7]. Or, $(-2)^{2006} = 2^{2006}$, $(-3)^{2006} = 3^{2006}$ et $(-1)^{2006} = 1$. On en déduit que $A_{2006} \equiv 2 \times 2^{2006} + 2 \times 3^{2006} + 1$ [7] Comme 2 est d'ordre 3, on réalise la division euclidienne de 2006 par 3 : $2006 = 3 \times 668 + 2$ donc $2^{2006} = (2^3)^{668} \times 2^2$ On sait que $2^3 \equiv 1$ [7] donc $2^{2006} \equiv 1^{668} \times 4$ [7] soit $2^{2006} \equiv 4$ [7].
Comme 3 est d'ordre 6, on réalise la division euclidienne de 3^{2006} par 6 : $2006 = 6 \times 334 + 2$ d'où $3^{2006} \equiv (3^6)^{334} \times 3^2$ [7]. Comme $3^6 \equiv 1$ [7] alors $3^{2006} \equiv 9$ [7].
Ainsi, $A_{2006} \equiv 2 \times 4 + 2 \times 9 + 1$ [7] soit $A_{2006} \equiv 27$ [7]. De plus, $27 - 6 = 21 = 7 \times 3$ est un multiple de 7 d'où $27 \equiv 6$ [7] soit $A_{2006} \equiv 6$ [7].

SUJET (b)

Exercice 1 :

1. (a) Comme a divise $(n+1)$ et (n^2-n+5), il divise aussi $n(n+1)-(n^2-n+5)$.
Or, $n(n+1)-(n^2-n+5) = n^2+n-n^2+n-5 = 2n-5$ d'où $a \mid 2n+3$.

   (b) On sait que a divise $(n+1)$ et $(2n-5)$, donc a divise $2(n+1)-(2n-5) = 2n+2-2n+5 = 7$. Le nombre 7 étant un nombre premier, ses seuls diviseurs positifs sont 1 et 7. Or, a est un diviseur positif (car $a \in \mathbb{N}$) de 7, donc les valeurs possibles du nombre a sont 1 et 7.

2. On pose la division de 200204 par 47.

$$\begin{array}{r|l} 200204 & 47 \\ \cline{2-2} -(188) & 4259 \\ \hline 122 & \\ -(94) & \\ \hline 280 & \\ -(235) & \\ \hline 454 & \\ -(423) & \\ \hline 31 & \end{array}$$

On obtient donc $200204 = 4259 \times 47 + 31$. Par conséquent :
$-200204 = -4259 \times 47 - 31 = -4259 \times 47 - 47 + 16 = -4260 \times 47 + 16$.
Comme $0 \leqslant 16 < 47$, alors 16 est le reste de la division euclidienne de -200204 par 47 et (-4260) est son quotient.

3. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété P_n : "$5^n - 1 - 4n$ est divisible par 16".
   - *Initialisation* : Pour $n=0$, $5^n - 1 - 4n = 5^0 - 1 = 0$. Comme 0 est divisible par 16 $(0 = 16 \times 0)$ alors la propriété P_0 est vraie.
   - *Etape d'hérédité* : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose P_n vraie, c'est-à-dire que $5^n - 1 - 4n$ est divisible par 16.
   Montrons que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que $5^{n+1} - 1 - 4(n+1)$ est divisible par 16.
   D'après P_n, il eciste $k \in \mathbb{Z}$ tel que $5^n - 1 - 4n = 16k$ ou encore $5^n = 16k + 1 + 4n$. Alors :
   $$5^{n+1}-1-4(n+1) = 5\times5^n-1-4n-4 = 5(16k+1+4n)-5-4n = 80k+5+20n-5-4n = 80k+16n = 16(5k+1)$$
   Comme $(5k+1) \in \mathbb{Z}$, alors 16 divise $5^{n+1} - 1 - 4(n+1)$, donc P_{n+1} est vraie.
   - *Conclusion* : D'après le principe de récurrence, $5^n - 1 - 4n$ est divisible par 16 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. (a) $A = 8n^2 - 4 = 2(4n^2 - 2) + 0$. Comme $4n^2 - 2 \in \mathbb{Z}$ et $0 \leqslant 0 < 2$, alors le reste de la division euclidienne de A par 2 est égal à 0.

   (b) $A = 8(n^2-1) + 8 - 4 = 8(n^2-1) + 4$. Comme $n^2 - 1 \in \mathbb{Z}$ et que $0 \leqslant 4 < 8$ alors le reste de la division euclidienne de A par 8 est égal à 4.

   (c) $A = 8n^2 - n + n - 4 = n(8n-1) + n - 4$. Cherchons pour quelles valeurs de n on a : $0 \leqslant n-4 < n$.
L'inégalité $n - 4 < n$ est toujours vraie donc l'encadrement précédent est valable pour tout $n \geqslant 4$.
Comme $(8n-1) \in \mathbb{Z}$, on peut alors conclure que si $n \geqslant 3$, le reste de la division euclidienne de A par n vaut $n - 4$.
Dans l'énoncé, on suppose que $n \geqslant 2$, il nous reste donc à traiter les cas $n = 2$ et $n = 3$.
Pour $n = 2$, on a alors $A = 8 \times 4 - 4 = 28 = 2 \times 14 + 0$. Comme $0 \leqslant 0 < 2$, le reste de la division euclidienne de $A = 28$ par $n = 2$ vaut 0.
Pour $n = 3$, on a alors $A = 8 \times 9 - 4 = 68 = 3 \times 22 + 2$. Comme $0 \leqslant 2 < 3$, alors le reste de la division euclidienne de $A = 68$ par $n = 3$ vaut 2.

   (d) $A = 8(n^2-1) + 8 - 4 = 8(n^2-1) + 4$. Cherchons pour quelles valeurs de n on a $0 \leqslant 4 < n^2 - 1$.
Cela revient à réspoudre $n^2 > 5$. Dès que $n \geqslant 3$, alors $n^2 \geqslant 9$ (car la fonction carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$) et donc $n^2 > 5$. Ainsi, si $n \geqslant 3$, vu que $n^2 - 1 \in \mathbb{Z}$, on peut affirmer que le reste de la division euclidienne de A par $n^2 - 1$ vaut 4.
On traite à part le cas $n = 2$ pour lequel $A = 28$ et $n^2 - 1 = 3$. Comme $28 = 3 \times 9 + 1$ (avec $0 \leqslant 1 < 3$), alors le reste de la division euclidienne de A par $n^2 - 1$ est égal à 1 pour $n = 2$.

5. (a) Comme $N = \overline{pkjm}$ en base 10, cela signifie que $N = p \times 10^3 + k \times 10^2 + j \times 10 + m$. Or $10 \equiv -1\ [11]$ pusique $10 + 1 = 11$ est un mutiple de 11. On en déduit que $10^2 \equiv (-1)^2\ [11]$ soit $10^2 \equiv 1\ [11]$ puis que $10^3 \equiv (-1)^3\ [11]$ soit $10^3 \equiv -1\ [11]$. Par conséquent : $N \equiv p \times (-1) + k \times 1 + j \times (-1) + m\ [11]$, ce qui s'écrit encore $N \equiv -p + k - j + m\ [11]$.

(b) De la même façon, $M = \overline{mjkp} = m \times 10^3 + j \times 10^2 + k \times 10 + p$.
Ainsi, $M \equiv m \times (-1) + j \times 1 + k \times (-1) + p$ [11] soit $M \equiv -m + j - k + p$ [11].
On peut additionner les deux relations concernant N et M : $N + M \equiv -p + k - j + m - m + j - k + p$ [11] donc $N + M \equiv 0$ [11]. On en déduit que $N + M$ est divisible par 11.

(c) On choisit $N = 1426$. Alors $M = 6241$ et $N + M = 7667$. D'après les questions précédentes, 7667 est nécessairement un multiple de 11.

6. (a) On appelle n le nombre de marches de l'escalier. Comme Arthur monte les marches quatre par quatre et qu'il lui en reste trois à la fin, alors $n \equiv 3$ [4]. Ainsi, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 3 + 4k$.
On sait que $80 \leqslant n \leqslant 91$ soit $80 \leqslant 3 + 4k \leqslant 91 \;\Leftrightarrow\; 77 \leqslant 4k \leqslant 88 \;\Leftrightarrow\; \frac{77}{4} \leqslant k \leqslant \frac{88}{4}$. Comme $\frac{88}{4} = 22$ et $19 = \frac{76}{4} < \frac{78}{4} < \frac{80}{4} = 20$ alors les seules valeurs possibles pour k sont 20, 21 et 22.
Or, le nombre k correspond au nombre de pas (sans le dernier de deux marches) faits par Arthur donc avant de gravir les trois dernières marches, Arthur a fait 20, 21 ou 22 pas. Les valeurs de n correspondantes sont $n = 4 \times 20 + 3 = 83$ ou $n = 4 \times 21 + 3 = 87$ ou $n = 4 \times 22 + 3 = 91$.

(b) Comme Claire monte les marches trois par trois et qu'il en reste deux à la fin, $n \equiv 2$ [3]. Cherchons par les valeurs de n obtenues à la question précédentes, celles qui vérifient cette propriété.
Pour $n = 83$, alors $n - 2 = 81 = 3 \times 27$ est divisible par 3 donc $83 \equiv 2$ [3].
Pour $n = 87$, $n - 2 = 85$ n'est pas divisible par 3 donc 87 n'est pas congru à 2 modulo 3.
Pour $n = 91$, $n - 2 = 89$ n'est pas divisible par 3 d'où 91 n'est pas congru à 2 modulo 3.
Parmi les trois valeurs possibles de n obtenues précédemmment, seule $n = 83$ convient. On peut donc conclure que l'escalier comporte 83 marches. De plus, $83 = 3 \times 27 + 2$ donc Claire a fait 27 pas si on ne compte pas les deux dernières marches montées.

Exercice 2 :

1. $9900 = 99 \times 100 = 3^2 \times 11 \times (2 \times 5)^2 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 11$ est la décomposition en produit de facteurs premiers de 9900. D'après le cours, on sait alors que 9900 admet $(2+1) \times (2+1) \times (2+1) \times (1+1) = 2 \times 3^3 = 54$ diviseurs positifs donc en tout $2 \times 54 = 108$ diviseurs.

2. La phrase est **fausse**.
On choisit $a = 4$ et $b = 7$. Alors $16 \equiv 9$ [7] (car $16 - 9 = 7$ est un multiple de 7). Comme $a - 3 = 4 - 3 = 1$ n'est pas divisible par 7, alors a n'est pas congru à 3 modulo 7.

3. La phrase est **fausse**.
Par exemple, 18 est divisible par 9 et par 6 mais il n'est pas divisible par 54.

4. La phrase est **fausse**.
Par exemple, $3 \equiv 7$ [4] (puisque $3 - 7 = -4$ est un multiple de 4). Le reste de la division euclidienne de 3 par 4 ne peut pas valoir 7 puisque ce reste doit être strictement inférieur à 3. On a donc trouvé un contre-exemple en choisissant $a = 3$ et $n = 4$.

5. (a) La phrase est **vraie**.
Comme $-7 \equiv 5$ [12] (car $-7 - 5 = -12$ est un multiple de 12) alors, par transitivité, $a \equiv 5$ [12].
Ainsi, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 5 + 12k$.

(b) La phrase est **vraie**.
En effet, comme $a \equiv -7$ [12], alors 12 est un diviseur de $a + 7$. Comme 2 est lui-même un diviseur de 12, par transitivité, 2 est un diviseur de $a + 7$; autrement dit, $7 + a$ est pair.

(c) La phrase est **fausse**.
Par exemple, $17 \equiv -7$ [12] (en effet, $17 + 7 = 24$ est un multiple de 12. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $17 = 12 - 7k$, c'est-à-dire que $-7k = 5$ ou encore $k = -\frac{5}{7}$.
Or, $-\frac{5}{7} \notin \mathbb{Z}$ donc on aboutit à une contradiction. Ainsi, il n'existe pas $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 12 - 7k$.

6. La phrase est **vraie**
On raisonne par distinction de cas modulo 3.

- Si $n \equiv 0$ [3], alors par produit, $n(n+1)(2n+1) \equiv 0$ [3]
- Si $n \equiv 1$ [3], alors $2n+1 \equiv 2+1$ [3]. Or, $3 \equiv 0$ [3] d'où $2n+1 \equiv 0$ [3] puis $n(n+1)(2n+1) \equiv 0$ [3].
- Si $n \equiv 2$ [3], alors $n+1 \equiv 3$ [3] donc $n+1 \equiv 0$ [3] puis $n(n+1)(2n+1) \equiv 0$ [3].

Dans tous les cas, on a obtenu que $n(n+1)(2n+1) \equiv 0$ [3], c'est-à-dire que $n(n+1)(2n+1)$ est un multiple de 3.

7. La phrase est **fausse**.

Par exemple, $10 \equiv 6$ [4] (puisque $10-6=4$ est un multiple de 4). Mais $\dfrac{10}{2}=5$ n'est pas congru à 3 modulo 4 puisque $5-3=2$ n'est pas un multiple de 4. On a trouvé un contre-exemple en prenant $a=10$ et $n=4$.

Exercice 3 : identique au sujet a).