CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLE N° 1

SUJET (a)

Exercice 1 : voir annexe pour les justifications sur le graphique

1. L'ensemble de définition de f est $D_f = [-3\,;\,5]$.
2. Les solutions de $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-2\,;\,1\,;\,5\}$.
3. Les solutions de l'inéquation $f(x) > 1$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ dont l'ordonnée est strictement supérieure à 1 . L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =]2\,;\,4[$.
4. (a) L'équation $f(x) = -2,5$ n'admet aucune solution car aucun point de la courbe $\mathcal{C}_f$ n'a pour ordonnée $-2,5$.

   (b) L'équation $f(x) = 1,3$ admet 2 solutions car la droite d'équation $y = 1,3$ coupe deux fois la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 2 :

1. - $f(x)$ est défini si et seulement si $-3x+6 \geqslant 0$ car la fonction racine carrée est définie seulement sur $\mathbb{R}^+$. Or, $-3x+6 \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; -3x \geqslant -6 \;\Leftrightarrow\; x \leqslant 2$. Ainsi, $D_f =]-\infty\,;\,2]$.
   - Le nombre 1 appartient à $D_f =]-\infty\,;\,2]$ et $f(1) = \sqrt{-3+6} = \sqrt{3} \simeq 1,73205$. Comme $f(1) \neq 1,732$ (en effet, $1,732$ est seulement une valeur approchée de $\sqrt{3}$) alors $A\,(1\,;\,1,732) \notin \mathcal{C}_f$.
   - Le nombre -2 n'admet pas d'antécédent par f car l'équation $f(x) = -2$ n'admet pas de solution. En effet, $f(x) = -2 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{-3x+6} = -2$ et une racine carrée est toujours positive donc elle ne peut pas valoir -2.
   - De même, $f(x) = -3 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{-3x+6} = -3$ et cette équation n'admet pas de solution puisqu'une racine carrée est toujours positive. Cela signifie que le nombre -3 n'a pas d'antécédent par f.

   La bonne réponse est la réponse c)

2. - Si $A\,(-1\,;\,x) \in \mathcal{C}_f$ alors cela implique que $-1 \in D_f$ mais pas nécessairement que $x \in D_f$. En effet, l'ensemble de définition correspond graphiquement à un ensemble d'abscisses et non à un ensemble d'ordonnées.
   - Comme $A\,(-1\,;\,x) \in C_f$ alors $f(-1) = x$, cela signifie que x est l'image de (-1) par f et (-1) admet bien une unique image par définition d'une fonction.
   - $f(x) = -1$ n'est a priori par vrai, on sait seulement que $f(-1) = x$.
   - Comme $f(-1) = x$ alors -1 est un antécédent de x par f mais rien ne nous permet d'affirmer que c'est l'unique antécédent de x par f puisqu'un nombre peut avoir plusieurs antécédents par une fonction.

   La bonne réponse est la réponse b)

3. - L'équation $f(x) = 2$ admet comme ensemble de solutions $\mathcal{S} = \{-2\} \cup [2\,;\,5]$ et dans l'intervalle $[2\,;\,5]$, il y a une infinité de nombres donc l'équation $f(x) = 2$ admet une infinité de solutions et non seulement 5 solutions.
   - Si $x \in]2\,;\,4]$ est placé sur l'axe des ordonnées, alors on constate que pour chaque valeur de x de cet intervalle, x est l'ordonnée d'un seul point de la courbe $\mathcal{C}_f$. Cela signifie que le nombre x ainsi choisi n'admet qu'un seul antécédent par f.
   - Cette courbe est la courbe d'une fonction car tout point de la courbe $\mathcal{C}_f$ a une unique ordonnée.
   - Le nombre 2 admet pour image 2 et seulement 2.

   La bonne réponse est la réponse b)

4. - $y \mapsto x$ ne correspond pas à une fonction car au nombre $y = -1,5$ correspond deux valeurs de x : $x = 0$ et $x = 2,5$.
   - D'après le tableau $f(-1,5) = -3,21$.

- La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2-4x+3}{x+2}$ admet pour valeur interdite les nombres x tels que $x+2=0$. Or, $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$. En particulier, -2 n'a pas d'image par cette fonction. Cela ne peut pas correspondre au tableau car $f(-2)=-3,75$.
- D'après le tableau, $f(1)=f(3)=0$ donc l'équation $f(x)=0$ admet pour solutions au moins les nombres 1 et 3.

La bonne réponse est la réponse d)

Exercice 3 :

1. (a) L'image de $\sqrt{2}$ est $f(\sqrt{2})=4\times(\sqrt{2})^3-3\sqrt{2}+1=4\times 2\sqrt{2}-3\sqrt{2}+1=8\sqrt{2}-3\sqrt{2}+1=5\sqrt{2}+1$.

   (b) $f\left(-\dfrac{3}{4}\right)=4\left(-\dfrac{3}{4}\right)^3-3\left(-\dfrac{3}{4}\right)+1=-4\times\dfrac{3^3}{4^3}+\dfrac{9}{4}+1=-\dfrac{27}{16}+\dfrac{9}{4}+1=\dfrac{-27+36+16}{16}=\dfrac{25}{16}$.

2.

x	$-1,5$	$-1,3$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,3$	$1,5$
$f(x)$	-8	$\simeq -3,9$	0	2	1	0	2	$\simeq 5,9$	10

3. voir annexe pour la courbe
4. voir annexe pour les justifications sur le graphique

   (a) Les solutions de $f(x)=2$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ dont l'ordonnée est égale à 2. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\{-0,5\,;\,1\}$.

   (b) Les solutions de $f(x)\geqslant 0$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés au dessus ou sur l'axe des abscisses. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=[-1\,;\,+\infty[$.

5. (a) La fonction g est une fonction affine donc sa courbe est une droite. Pour la représenter, il suffit de déterminer deux points de la droite.

x	0	1
$g(x)$	1	2

   donc les points de coordonnées $(0\,;\,1)$ et $(1\,;\,2)$ sont sur $\mathcal{C}_g$. (voir annexe pour le tracé)

   (b) voir annexe pour les justifications graphiques
   Les solutions de $f(x)=g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\{-1\,;\,0\,;\,1\}$.

   (c)
$$\begin{aligned} f(x)=g(x) &\Leftrightarrow 4x^3-3x+1=x+1 \Leftrightarrow 4x^3-3x+1-x-1=0 \Leftrightarrow 4x^3-4x=0\\ &\Leftrightarrow 4x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow 4x(x-1)(x+1)=0\end{aligned}$$

   Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. Ainsi,

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow 4x=0 \text{ ou } x-1=0 \text{ ou } x+1=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=1 \text{ ou } x=-1$$

   L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\{-1\,;\,0\,;\,1\}$ (identique à ce qui a été obtenu graphiquement).

Exercice 4 :

1. (a) D'après l'algorithme, -3 est une valeur interdite. Les étapes de calcul pour $x\neq -3$ sont les suivantes :
   $x\mapsto 3+x\mapsto \dfrac{1}{3+x}\mapsto\dfrac{6}{3+x}\mapsto\dfrac{6}{3+x}-3$.
   Ainsi la fonction f définie par l'algorithme est $f : x\mapsto\dfrac{6}{3+x}-3$.

   (b) Comme -3 est une valeur interdite, $-3\notin D_f$ et $A(-3\,;\,-3)\notin\mathcal{C}_f$.

2. (a) On cherche les valeurs interdites de $g(x)$ en résolvant $-x^2-5=0 \Leftrightarrow -x^2=5 \Leftrightarrow x^2=-5$. Or, cette équation n'admet pas de solution car un carré est toujours positif. Ainsi, $g(x)$ n'admet pas de valeur interdite et $D_g=\mathbb{R}$.

   (b) • $\sqrt{5}\in D_g=\mathbb{R}$ et $g(\sqrt{5})=\dfrac{7}{-\left(\sqrt{5}\right)^2-5}=\dfrac{7}{-5-5}=-\dfrac{7}{10}$.
   Comme $g(\sqrt{5})\neq 0$ alors $M(\sqrt{5}\,;\,0)\notin\mathcal{C}_g$.

- $2^{-1} = \dfrac{1}{2} \in D_g$ et $g(2^{-1}) = g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{7}{-\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5} = \dfrac{7}{-\frac{1}{4} - \frac{20}{4}} = \dfrac{7}{-\frac{21}{4}} = -7 \times \dfrac{4}{21} = -\dfrac{4}{3}$. Ainsi, $N\left(2^{-1}\,;\,-\dfrac{4}{3}\right) \in \mathcal{C}_g$.

(c) $g(0) = \dfrac{7}{-0-5} = -\dfrac{7}{5}$ donc l'ordonnée du point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse 0 est $-\dfrac{7}{5}$.

(d) On résout $g(x) = 0 \iff \dfrac{7}{-x^2-5} = 0$. Un quotient est nul lorsque son numérateur est nul donc on obtient $-7 = 0$, ce qui est impossible. Par conséquent, l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution et aucun point de $\mathcal{C}_g$ n'a pour ordonnée 0.

(e) On résout $g(x) = -1 \iff \dfrac{7}{-x^2-5} = -1 \iff \dfrac{7}{-x^2-5} + 1 = 0 \iff \dfrac{7 - x^2 - 5}{-x^2-5} = 0 \iff \dfrac{2-x^2}{-x^2-5} = 0$. Un quotient est nul lorsque son numérateur est nul donc l'équation précédente devient $2 - x^2 = 0$, c'est-à-dire : $x^2 = 2 \iff x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$. Le nombre -1 admet deux antécédents par g, qui sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

(f)
- *Entrée* : Choisir un nombre x.
- *Traitement* :
  - A) Elever ce nombre au carré
  - B) Prendre l'opposé du nombre obtenu
  - C) Soustraire 5
  - D) Prendre l'inverse du nombre obtenu
  - E) Multiplier par 7.
- *Sortie* : Afficher le nombre obtenu et l'appeler $g(x)$.

SUJET (b)

Exercice 1 : voir annexe pour les justifications sur le graphique

1. L'ensemble de définition de f est $D_f = [-3\,;\,5]$.
2. Les solutions de $f(x) = 1$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ dont l'ordonnée est égale à 1. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-3\,;\,2\,;\,4\}$.
3. Les solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés strictement en dessous de l'axe des abscisses. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =]-2\,;\,1[$.
4. (a) L'équation $f(x) = -1,2$ admet 2 solutions car la droite d'équation $y = -1,2$ coupe deux fois la courbe $\mathcal{C}_f$.

   (b) L'équation $f(x) = 2,5$ n'admet aucune solution car aucun point de la courbe $\mathcal{C}_f$ n'a pour ordonnée $2,5$.

Exercice 2 : Ce sont les mêmes questions et les mêmes réponses que pour le sujet (a) mais l'ordre a été inversé : voir le corrigé du sujet (a) pour les justifications.

1. ***La bonne réponse est la réponse d)***
2. ***La bonne réponse est la réponse c)***
3. ***La bonne réponse est la réponse c)***
4. ***La bonne réponse est la réponse b)***.

Exercice 3 :

1. (a) L'image de $\sqrt{3}$ est $f(\sqrt{3}) = 4\times(\sqrt{3})^3 - 3\sqrt{3} - 1 = 4\times 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 1 = 12\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 1 = 9\sqrt{3} - 1$.

   (b) $f\left(-\frac{3}{4}\right) = 4\left(-\frac{3}{4}\right)^3 - 3\left(-\frac{3}{4}\right) - 1 = -4\times\frac{3^3}{4^3} + \frac{9}{4} - 1 = -\frac{27}{16} + \frac{9}{4} - 1 = \frac{-27+36-16}{16} = -\frac{7}{16}$.

2.

x	$-1,5$	$-1,3$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,3$	$1,5$
$f(x)$	-10	$\simeq -5,9$	-2	0	-1	-2	0	$\simeq 3,9$	8

3. voir annexe pour la courbe
4. voir annexe pour les justifications sur le graphique

   (a) Les solutions de $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-0,5\,;\,1\}$.

   (b) Les solutions de $f(x) \geqslant -2$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ dont l'ordonnée est supérieure ou égale à -2. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = [-1\,;\,+\infty[$.

5. (a) La fonction g est une fonction affine donc sa courbe est une droite. Pour la représenter, il suffit de déterminer deux points de la droite.

x	0	1
$g(x)$	-1	0

   donc les points de coordonnées $(0\,;\,-1)$ et $(1\,;\,0)$ sont sur $\mathcal{C}_g$. (voir annexe pour le tracé)

   (b) voir annexe pour les justifications graphiques
   Les solutions de $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-1\,;\,0\,;\,1\}$.

   (c)

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow 4x^3 - 3x - 1 = x - 1 \Leftrightarrow 4x^3 - 3x - 1 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow 4x(x-1)(x+1) = 0 \end{aligned}$$

   Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. Ainsi,

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 4x = 0 \text{ ou } x - 1 = 0 \text{ ou } x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = -1$$

   L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-1\,;\,0\,;\,1\}$ (identique à ce qui a été obtenu graphiquement).

Exercice 4 :

1. (a) D'après l'algorithme, -2 est une valeur interdite. Les étapes de calcul pour $x \neq -3$ sont les suivantes : $x \mapsto 2+x \mapsto \dfrac{1}{2+x} \mapsto \dfrac{5}{2+x} \mapsto \dfrac{5}{2+x} - 4$.

   Ainsi la fonction f définie par l'algorithme est $f : x \mapsto \dfrac{5}{2+x} - 4$.

   (b) Comme -2 est une valeur interdite, $-2 \notin D_f$ et $A\,(-2\,;\,-4) \notin \mathcal{C}_f$.

2. (a) On cherche les valeurs interdites de $g(x)$ en résolvant $-x^2-3=0 \;\Leftrightarrow\; -x^2=3 \;\Leftrightarrow\; x^2=-3$. Or, cette équation n'admet pas de solution car un carré est toujours positif. Ainsi, $g(x)$ n'admet pas de valeur interdite et $D_g=\mathbb{R}$.

   (b) • $\sqrt{3} \in D_g = \mathbb{R}$ et $g(\sqrt{3}) = \dfrac{8}{-\left(\sqrt{3}\right)^2-3} = \dfrac{8}{-3-3} = -\dfrac{8}{6} = -\dfrac{4}{3}$.

   Comme $g(\sqrt{3}) \neq 0$ alors $M\,(\sqrt{3}\,;\,0) \notin \mathcal{C}_g$.

   • $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9} \in D_g$.

$$g(3^{-2}) = g\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{8}{-\left(\frac{1}{9}\right)^2-3} = \frac{8}{-\frac{1}{81}-\frac{243}{81}} = \frac{8}{-\frac{244}{81}} = -8\times\frac{81}{244} = -\frac{2\times 81}{61} = -\frac{162}{61}$$

   Comme $g(3^{-2}) \neq -\dfrac{18}{7}$, $N\left(3^{-2}\,;\,-\dfrac{18}{7}\right) \notin \mathcal{C}_g$.

   (c) $g(0) = \dfrac{8}{-0-3} = -\dfrac{8}{3}$ donc l'ordonnée du point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse 0 est $-\dfrac{8}{3}$.

   (d) On résout $g(x)=0 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{8}{-x^2-3}=0$. Un quotient est nul lorsque son numérateur est nul donc on obtient $-8=0$, ce qui est impossible. Par conséquent, l'équation $g(x)=0$ n'admet pas de solution et aucun point de $\mathcal{C}_g$ n'a pour ordonnée 0.

   (e) On résout $g(x)=-1 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{8}{-x^2-3}=-1 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{8}{-x^2-3}+1=0 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{8-x^2-3}{-x^2-3}=0 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{5-x^2}{-x^2-3}=0$.
   Un quotient est nul lorsque son numérateur est nul donc l'équation précédente devient $5-x^2=0$, c'est-à-dire : $x^2=5 \;\Leftrightarrow\; x=\sqrt{5}$ ou $x=-\sqrt{5}$. Le nombre -1 admet deux antécédents par g, qui sont $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$.

   (f) • *Entrée* : Choisir un nombre x.

   • *Traitement* :

   A) Elever ce nombre au carré

   B) Prendre l'opposé du nombre obtenu

   C) Soustraire 3

   D) Prendre l'inverse du nombre obtenu

   E) Multiplier par 8.

   • *Sortie* : Afficher le nombre obtenu et l'appeler $g(x)$.