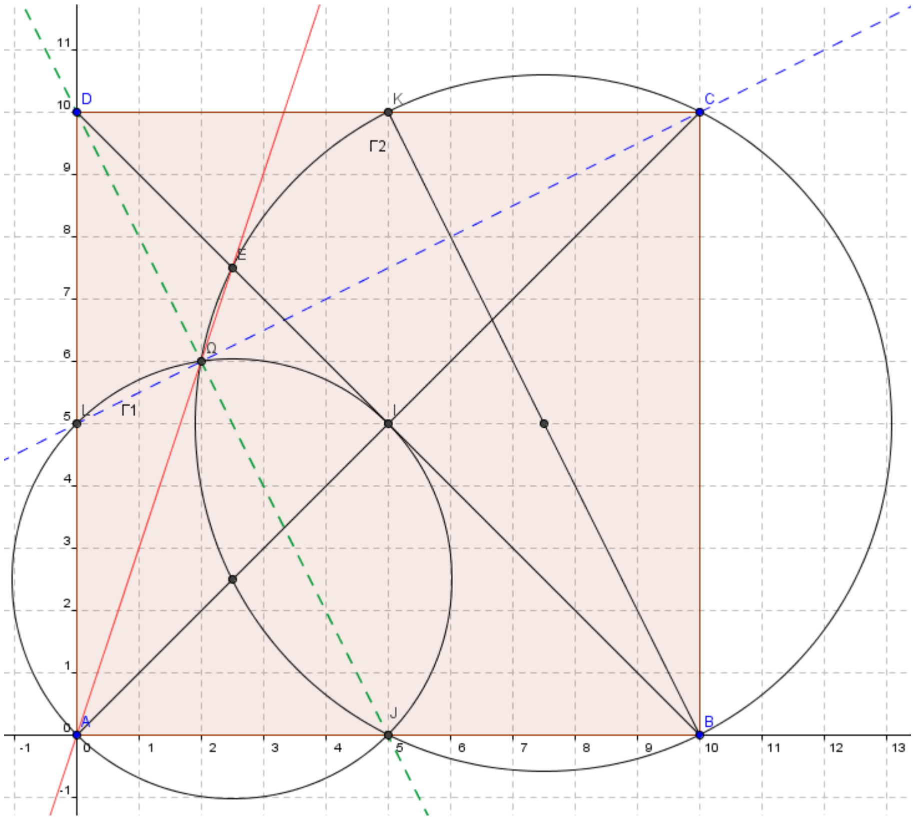
CORRECTION DU DEVOIR A LA MAISON N° 9

Exercice 1 :

Question préliminaire

Soit (AB) une droite et S une similitude directe d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Alors l'image de (AB) est $(A'B')$ avec $S(A) = A'$ et $S(B) = B'$ (on utilise le fait que l'image d'une droite est une droite). Par définition de l'angle d'une similitude directe, $\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{S(A)S(B)}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, c'est-à-dire : $\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{A'B'}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Cela implique que les droites (AB) et $(A'B')$ sont perpendiculaires. L'image de (AB) par S est donc une droite qui lui est perpendiculaire.



PARTIE A

1. Le rapport de s est $\lambda = \dfrac{s(A)s(B)}{AB} = \dfrac{IK}{AB}$. On considère le triangle ADC. Comme I est le milieu de $[AC]$ (diagonale du carré $ABCD$) et que K est le milieu de $[CD]$, alors (IK) est parallèle à (AD) et $IK = \dfrac{1}{2}AD$ d'après le théorème de la droite des milieux. Or, $AD = AB$ (car $ABCD$ est un carré) donc $IK = \dfrac{AB}{2}$ et $\lambda = \dfrac{IK}{AB} = \dfrac{1}{2}$.

   L'angle de la similitude est $\theta \equiv \left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{s(A)s(B)}\right)\ [2\pi]$ soit $\theta \equiv \left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{IK}\right)\ [2\pi]$. L'application précédente du théorème des milieux dans ADC permet d'écrire que $\overrightarrow{IK} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ donc $\theta \equiv \left(\overrightarrow{AB}\,;\,\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\ [2\pi]$ ou encore $\theta \equiv \left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\right)\ [2\pi]$. Le carré $ABCD$ étant direct, alors $\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et donc $\theta \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

   s est une similitude de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

2. • *Montrons que J est un point d'intersection de Γ_1 et de Γ_2.*

   Dans le triangle ABC, on peut également appliquer le théorème des milieux avec J milieu de $[AB]$ et I milieu de $[AC]$. On en déduit que (IJ) est parallèle à (BC). Comme (BC) est perpendiculaire à $(AJ) = (AB)$, cela implique que (IJ) est aussi perpendiculaire à (AJ). Autrement dit, le triangle AJI est rectangle en J, ce qui entraine que J est sur le cercle Γ_1 de diamètre $[AI]$.
   On a montré que (JI) est parallèle à (BC) et que (IK) est parallèle à (AD). Comme $ABCD$ est un carré alors (BC) est parallèle à (AD) donc (IJ) est aussi parallèle à (BC). Finalement, (IJ) et (IK) sont deux parallèles à (BC). Comme elles ont un point commun, ces deux droites sont confondues et on a (JK) parallèle à (BC). On en déduit que (JK) est perpendiculaire à $(AB) = (JB)$. En particulier, JBK est rectangle en J et le point J est alors situé sur le cercle Γ_2 de diamètre $[BK]$.

   Le point J est sur les deux cercles Γ_1 et Γ_2 donc c'est un point d'intersection de ces deux cercles.

   • *Montrons que le centre Ω de la similitude directe s est un point d'intersection de Γ_1 et de Γ_2*

   `On peut déjà remarquer que` s `est une similitude à centre car ce n'est ni l'identité ni une translation (son angle est égal à` $\dfrac{\pi}{2}$`.)`

   L'angle θ de la similitude s est $\theta \equiv \left(\overrightarrow{\Omega A}\,;\,\overrightarrow{s(\Omega)s(A)}\right)\ [2\pi]$ soit $\theta \equiv \left(\overrightarrow{\Omega A}\,;\,\overrightarrow{\Omega I}\right)\ [2\pi]$.

   Ainsi, $\left(\overrightarrow{\Omega A}\,;\,\overrightarrow{\Omega I}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et le triangle ΩAI est rectangle en Ω, ce qui entraine que Ω est sur le cercle Γ_1 de diamètre $[AI]$.
   De même, $\theta \equiv \left(\overrightarrow{\Omega B}\,;\,\overrightarrow{s(\Omega)s(B)}\right)\ [2\pi]$ soit $\theta \equiv \left(\overrightarrow{\Omega B}\,;\,\overrightarrow{\Omega K}\right)\ [2\pi]$.
   Ainsi, $\left(\overrightarrow{\Omega B}\,;\,\overrightarrow{\Omega K}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et le triangle ΩBK est rectangle en Ω, ce qui entraine que Ω est sur le cercle Γ_2 de diamètre $[BK]$.

   Le point Ω est sur les deux cercles Γ_1 et Γ_2 donc c'est un point d'intersection de ces deux cercles.

   • *Montrons que Ω et J sont distincts*

   Supposons par l'absurde que $\Omega = J$. Alors $s(J) = J$. Comme J est le milieu de $[AB]$, par conservation des milieux on sait que $s(J)$ est le milieu de $[s(A)s(B)] = [IK]$. Or, J n'est pas le milieu de $[IK]$ donc on aboutit à une contradiction.

   Les points J et Ω sont deux points disctincs, tous les deux intersection de Γ_1 et Γ_2. Or, deux cercles non confondus possèdent au maximum deux points d'intersection donc les cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en deux points distincts : Ω et J.

3. (a) L'image par s de (AC) est une droite perpendiculaire à (AC) d'après la question préliminaire. De plus, $s(A) = I$ donc c'est la droite perpendiculaire à (AC) passant par I. Comme $[AC]$ est une diagonale du carré $ABCD$ de centre I et que les diagonales d'un carré se coupent perpendiculairement, alors la perpendiculaire à (AC) passant par I est l'autre diagonale du carré, c'est la droite (BD).

   L'image par s de (BC) est une droite perpendiculaire à (BC) d'après la question préliminaire. De plus, $s(B) = K$ donc c'est la droite perpendiculaire à (BC) passant par K. On sait que (CD) est perpendiculaire à (BC) (propriété du carré) et comme K est le milieu de $[CD]$, la droite (BC) passe par K. L'image de (BC) est donc (CD).

   Comme C est le point d'intersection de (AC) et (BC), son image $s(C)$ sera le point d'intersection des droites images (BD) et (CD), c'est donc le point D.

   (b) I est le centre du carré $ABCD$, c'est donc le milieu de la diagonale $[AC]$. Par conservation des milieux, son image $s(I) = E$ sera le milieu du segment image $[s(A)s(C)] = [ID]$.

4. La transformation $s \circ s$ est une similitude directe en tant que composée de deux similitudes directes. Son angle est la somme des angles des similitudes qui la composent donc c'est $\theta' \equiv 2\theta\ [2\pi]$. Comme $\theta \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ alors $\theta' = \pi\ [2\pi]$. La similitude $s \circ s$ est donc une homothétie.
   De plus, $s \circ s(A) = s(s(A)) = s(I) = E$ et $s \circ s(\Omega) = s(s(\Omega)) = s(\Omega) = \Omega$. Ainsi, le centre de l'homothétie $s \circ s$ est Ω et $\theta' \equiv \left(\overrightarrow{\Omega A}\,;\,\overrightarrow{s \circ s(\Omega) s \circ s(A)}\right)\ [2\pi]$ soit $\theta' \equiv \left(\overrightarrow{\Omega A}\,;\,\overrightarrow{\Omega E}\right)\ [2\pi]$ soit $\left(\overrightarrow{\Omega A}\,;\,\overrightarrow{\Omega E}\right) \equiv \pi\ [2\pi]$.
   On en déduit que A, Ω et E sont alignés.

PARTIE B

1. Comme A est l'origine du repère $z_A = 0$. Comme $\overrightarrow{AB} = 10\vec{i}$ avec $\vec{i}$ le vecteur unité en abscisse alors $z_B = 10$. De même, $\overrightarrow{AD} = 10\vec{j}$ avec $\vec{j}$ le vecteur unité en ordonnée d'où $z_D = 10i$. On sait enfin que $ABCD$ est un carré donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ soit $z_C - z_B = 10i \Leftrightarrow z_C = 10i + z_B = 10 + 10i$.

2. D'après le cours, il existe une unique similitude directe qui transforme un couple de points en un autre couple de points, donc il existe une uique similitude directe telle que $s(A) = I$ et $s(B) = K$. Pour justifier que la forme complexe de s est $z' = \frac{i}{2}z + 5 + 5i$, il suffit donc de vérifier que pour cette écriture complexe, $z_I = z'_A$ et $z_K = z'_B$.

   $z'_A = \frac{i}{2}z_A + 5 + 5i = \frac{i}{2} \times 0 + 5 + 5i = 5 + 5i$ et $z'_B = \frac{i}{2}z_B + 5 + 5i = \frac{i}{2} \times 10 + 5 + 5i = 5i + 5 + 5i = 5 + 10i$

   Or, I est le milieu de $[AC]$ d'où $z_I = \dfrac{z_A + z_C}{2} = \dfrac{0 + 10 + 10i}{2} = 5 + 5i$ donc $z'_A = z_I$. On sait aussi que K est le milieu de $[CD]$ donc $z_K = \dfrac{z_C + z_D}{2} = \dfrac{10 + 10i + 10i}{2} = 5 + 10i$ donc $z'_B = z_K$.

   L'écriture complexe de s est bien $z' = \frac{i}{2}z + 5 + 5i$.

3.
$$\begin{aligned} s(\Omega) = \Omega \quad &\Leftrightarrow \quad \omega = \frac{i}{2}\omega + 5 + 5i \Leftrightarrow \omega(1 - \frac{i}{2}) = 5 + 5i \Leftrightarrow \omega = \frac{5(1+i)}{\frac{2-i}{2}} = \frac{10(1+i)}{2-i} = \frac{10(1+i)(2+i)}{4+1} \\ &\Leftrightarrow \quad \omega = \frac{10(2 + i + 2i - 1)}{5} = 2(1 + 3i) = 2 + 6i \end{aligned}$$

   L'affixe de Ω est $\omega = 2 + 6i$

4. $E = s(I)$ donc $z_E = \frac{i}{2}z_I + 5 + 5i = \frac{i}{2}(5 + 5i) + 5 + 5i = \dfrac{5i - 5 + 10 + 10i}{2} = \dfrac{5 + 15i}{2} = \dfrac{5}{2} + \dfrac{15}{2}i$

   L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AE}$ est $z_{\overrightarrow{AE}} = z_E = \frac{5}{2} + \frac{15}{2}i$ et l'affixe du vecteur $\overrightarrow{A\Omega}$ est $z_{\overrightarrow{A\Omega}} = z_\Omega = 2 + 6i$. On remarque que $\frac{5}{4}(2 + 6i) = \frac{10}{4} + \frac{30}{4}i = \frac{5}{2} + \frac{15}{2}i$ donc $\overrightarrow{AE} = \frac{5}{4}\overrightarrow{A\Omega}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{A\Omega}$ sont donc colinéaires, ce qui signifie que les points A, Ω et E sont alignés.

5. Le point J est le milieu de $[AB]$ donc $z_J = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{0 + 10}{2} = 5$.

   De plus, $\left(\overrightarrow{\Omega J}\,;\overrightarrow{\Omega D}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z_D - z_\Omega}{z_J - z_\Omega}\right)\ [2\pi]$.

   Or, $\dfrac{z_D - z_\Omega}{z_J - z_\Omega} = \dfrac{10i - 2 - 6i}{5 - 2 - 6i} = \dfrac{4i - 2}{3 - 6i} = \dfrac{(4i - 2)(3 + 6i)}{9 + 36} = \dfrac{12i - 24 - 6 - 12i}{40} = \dfrac{-30}{40} = -\dfrac{3}{4}$. L'argument d'un nombre réel négatif vaut π donc $\left(\overrightarrow{\Omega J}\,;\overrightarrow{\Omega D}\right) \equiv \pi\ [2\pi]$, ce qui implique que $\Omega \in (DJ)$.

   Le point L est le milieu de $[AD]$ donc $z_L = \dfrac{z_A + z_D}{2} = \dfrac{0 + 10i}{2} = 5i$.

   De plus, $\left(\overrightarrow{\Omega C}\,;\overrightarrow{\Omega L}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z_L - z_\Omega}{z_C - z_\Omega}\right)\ [2\pi]$.

   Or, $\dfrac{z_L - z_\Omega}{z_C - z_\Omega} = \dfrac{5i - 2 - 6i}{10 + 10i - 2 - 6i} = \dfrac{-i - 2}{4i + 8} = \dfrac{(-i - 2)(8 - 4i)}{64 + 16} = \dfrac{-8i - 4 - 16 + 8i}{80} = \dfrac{-20}{80} = -\dfrac{1}{4}$.
   L'argument d'un nombre réel négatif vaut π donc $\left(\overrightarrow{\Omega C}\,;\overrightarrow{\Omega L}\right) \equiv \pi\ [2\pi]$, ce qui implique que $\Omega \in (CL)$.

   Finalement, Ω est un point commun à (AE) (question précédente), à (CL) et à (DJ) et les trois droites sont alors concourrantes en Ω.

Exercice 2 :

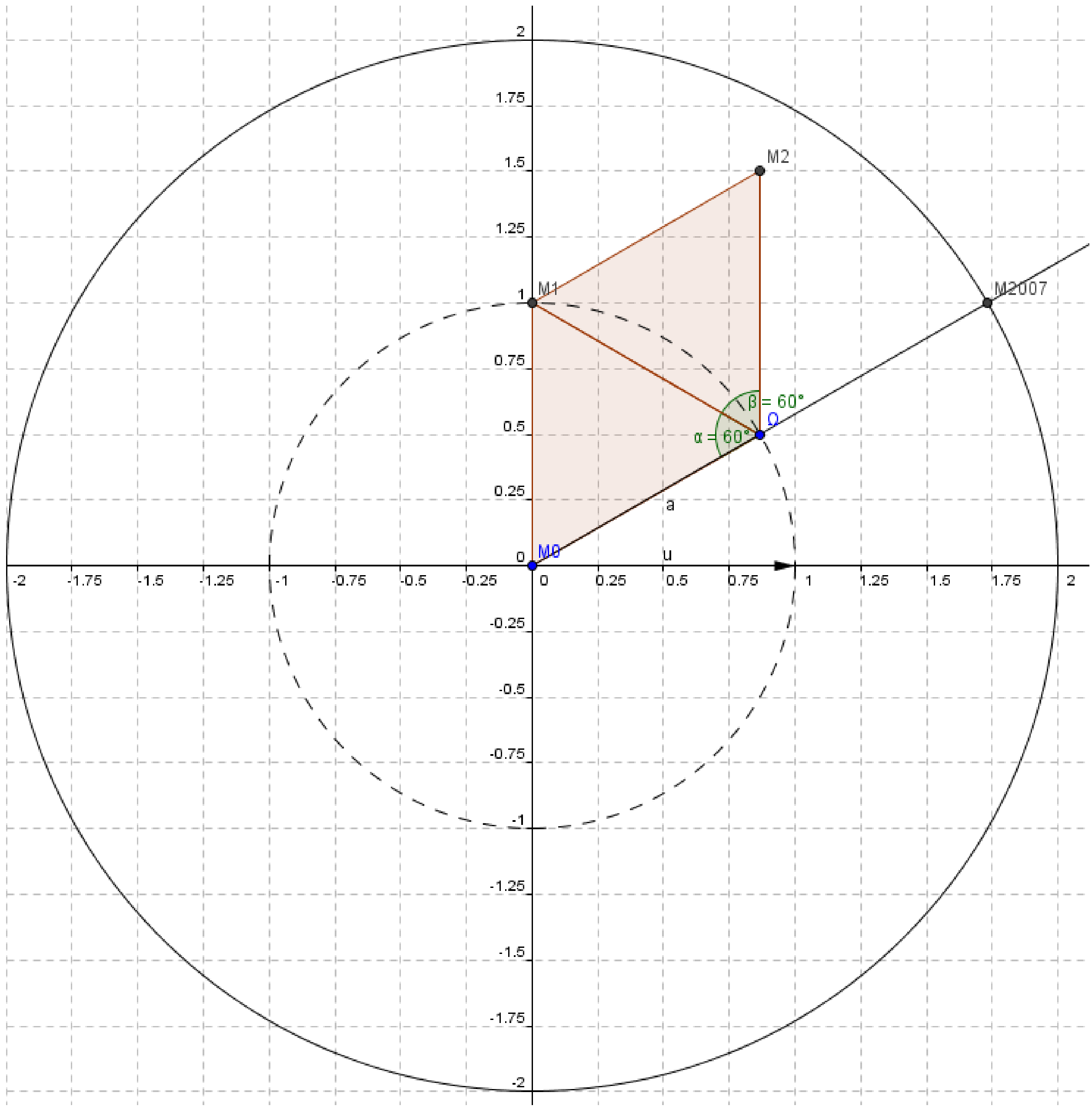
1. Déterminons la forme algébrique de $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$: $j = \cos(\dfrac{2\pi}{3}) + i\sin(\dfrac{2\pi}{3}) = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   Ω d'affixe ω est un point invariant de f si et seulement si

$$\omega = -j\omega + i \quad \Leftrightarrow \quad \omega(1+j) = i \;\Leftrightarrow\; \omega = \frac{i}{1+e^{\frac{2i\pi}{3}}} = \frac{i}{1-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{i}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2i}{1+i\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega = \frac{2i(1-i\sqrt{3})}{1+3} = \frac{2(i+\sqrt{3})}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

   On obtient bien un unique point invariant Ω d'affixe $\omega = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$.
   Comme f a une écriture complexe du type $z' = az + b$ avec $a = -j$ et $b = i$, alors f est une similitude directe. Son rapport est $\lambda = |a| = \left|-e^{i\frac{2\pi}{3}}\right| = \left|e^{i\frac{2\pi}{3}}\right| = 1$ car $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ est l'écriture complexe de nombre de module 1 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$. De plus l'angle de f est $\theta \equiv \arg(a)\ [2\pi]$ donc $\theta \equiv \arg\left(-e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\ [2\pi]$ c'est-à-dire $\theta \equiv \arg(-1) + \arg\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\ [2\pi]$ soit $\theta \equiv -\pi + \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$. Ainsi, $\theta \equiv -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$. f est une isométrie dont l'angle est $-\dfrac{\pi}{3}$, c'est donc la rotation de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$.

2.



(a) On place Ω en déterminant la forme exponentielle de son affixe :

$$\omega = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6}) = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Ainsi, $O\Omega = |\omega| = 1$ et le point Ω est donc le point du cercle de centre O ayant une ordonnée égale à $\frac{1}{2}$ et une abscisse positive.
On construit M_1 comme l'image de O par la rotation de centre Ω et de rayon $-\frac{\pi}{3}$ et le point M_2 comme l'image de M_1 par cette même rotation.

(b) L'écriture complexe de la rotation f peut être donnée ainsi :

$$z' = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z - \omega) + \omega = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z - e^{i\frac{\pi}{6}}) + e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Comme $M_{n+1} = f(M_n)$ alors $z_{n+1} = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_n - e^{i\frac{\pi}{6}}) + e^{i\frac{\pi}{6}}$ soit $z_{n+1} - e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_n - e^{i\frac{\pi}{6}})$. Cela signifie que $Z_{n+1} = e^{-i\frac{\pi}{3}}Z_n$ et on peut choisir $a = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
La forme trigonométrique de a est $a = \cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})$.
Pour $p = 6$, $a^p = a^6 = \left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^6 = e^{-6i\frac{\pi}{3}} = e^{-2i\pi} = 1$ car le nombre complexe de module 1 et d'argument -2π est le nombre égal à 1.

(c) La suite (Z_n) est une suite géométrique de raison a puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1} = aZ_n$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = a^n Z_0$. Or, $Z_0 = z_0 - e^{i\frac{\pi}{6}} = -e^{i\frac{\pi}{6}}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$Z_n = -\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^n \times e^{i\frac{\pi}{6}} = -e^{\left(\frac{-n\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)i} = -e^{\frac{(1-2n)i\pi}{6}}$$

De plus, $z_n = Z_n + e^{i\frac{\pi}{6}} = -e^{\frac{(1-2n)i\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{6}}\left(1 - e^{-i\frac{n\pi}{3}}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
La division euclidienne de 2007 par 6 donne : $2007 = 6 \times 334 + 3$ donc

$$Z_{2007} = a^{2007}(-e^{i\frac{\pi}{6}}) = -e^{i\frac{\pi}{6}} \times a^{6\times 334+3} = -e^{i\frac{\pi}{6}} \times (a^6)^{334} \times \left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^3$$

Or, $a^6 = 1$ donc $(a^6)^{334} = 1$ et $Z_{2007} = -e^{i\frac{\pi}{6}} \times e^{-i\pi} = -e^{i\frac{\pi}{6}} \times (-1) = e^{i\frac{\pi}{6}}$.
De plus, $z_{2007} = e^{i\frac{\pi}{6}} + Z_{2007} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.
Ainsi, $OM_{2007} = |z_{2007}| = |2e^{i\frac{\pi}{6}}| = 2$ et $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM_{2007}}\right) \equiv \arg(z_{2007})\ [2\pi]$ donc $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM_{2007}}\right) \equiv \arg\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\ [2\pi]$ c'est-à-dire $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM_{2007}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.