CORRECTION DU DEVOIR A LA MAISON N° 8

Exercice 97 p.79 :

1. L'écriture complexe de f est de la forme $z' = az+b$ avec $a = -(\sqrt{3}+i) \in \mathbb{C}^*$ et $b = -1 + i(1+\sqrt{3}) \in \mathbb{C}$, alors f est une similitude directe. Vu que $a \neq 1$, f admet un unique point invariant (en effet, $z = az+b \Leftrightarrow z(1-a) = b \Leftrightarrow z = \dfrac{b}{1-a}$ lorsque $a \neq 1$). Vérifions que l'affixe de l'image du point d'affixe i est encore i.

$$-(\sqrt{3}+i)i - 1 + i(1+\sqrt{3}) = -\sqrt{3}i + 1 - 1 + i + i\sqrt{3} = i$$

Le point d'affixe i est invariant par f, c'est donc le centre de la similitude.

Le rapport de la similitude est $\lambda = |a| = |-(\sqrt{3}+i)| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$.

L'angle de la similitude est $\theta \equiv \arg(a)$ $[2\pi]$. Or, $a = -(\sqrt{3}+i) = 2\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos(-\dfrac{5\pi}{4}) + i\sin(-\dfrac{5\pi}{6})\right)$.

Ainsi, $\theta \equiv -\dfrac{5\pi}{6}$ $[2\pi]$.

2. $\Omega M_0 = |z_0 - z_\Omega| = \left|\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3}{4}i - i\right| = \left|\dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{1}{4}i\right| = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{3}{16} + \dfrac{1}{16}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$

$\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{\Omega M_0}\right) \equiv \arg(z_0 - z_\Omega)$ $[2\pi]$. D'après le calcul précédent à l'intérieur du module,

$$z_0 - z_\Omega = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

On en déduit que $\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{\Omega M_0}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{6}$ $[2\pi]$.

3a bis) Par définition du rapport d'une similitude, $\lambda = \dfrac{f(\Omega)f(M_n)}{\Omega M_n} = \dfrac{\Omega M_{n+1}}{\Omega M_n}$. Comme $\lambda = 2$, alors $\Omega M_{n+1} = 2\Omega M_n$.

Par définition de l'angle d'une similitude directe, $\theta \equiv \left(\overrightarrow{\Omega M_n}\,;\,\overrightarrow{f(\Omega)f(M_n)}\right)$ $[2\pi]$ soit $\theta \equiv \left(\overrightarrow{\Omega M_n}\,;\,\Omega M_{n+1}\right)$ $[2\pi]$.

On a vu que l'angle de la similitude est $-\dfrac{5\pi}{6}$ donc $\left(\overrightarrow{\Omega M_n}\,;\,\Omega M_{n+1}\right) \equiv -\dfrac{5\pi}{6}$ $[2\pi]$

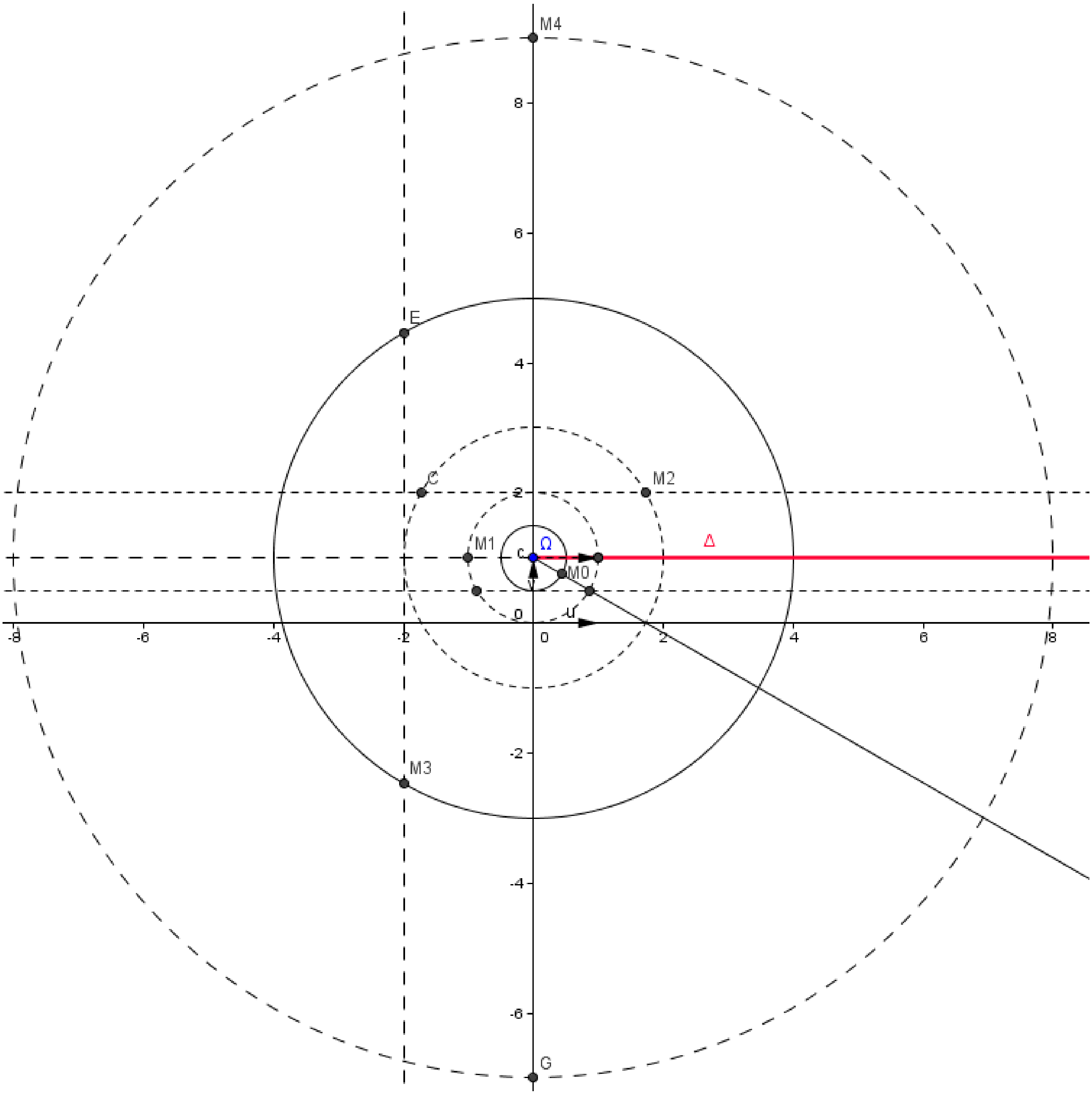
(a) – On place le point Ω et on construit M_0 tel que $\Omega M_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{\Omega M_0}\right) \equiv -\dfrac{pi}{6}$ $[2\pi]$.

– Pour placer M_1, on utilise que $\Omega M_1 = 2\Omega M_0 = 2 \times \dfrac{1}{2} = 1$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M_0}\,;\,\Omega M_1\right) \equiv -\dfrac{5\pi}{6}$ $[2\pi]$

– Pour placer M_2, on utilise que $\Omega M_2 = 2\Omega M_1 = 2 \times 1 = 2$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M_1}\,;\,\Omega M_2\right) \equiv -\dfrac{5\pi}{6}$ $[2\pi]$

– Pour placer M_3, on utilise que $\Omega M_3 = 2\Omega M_2 = 2 \times 2 = 4$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M_2}\,;\,\Omega M_3\right) \equiv -\dfrac{5\pi}{6}$ $[2\pi]$. En particulier, $\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{\Omega M_3}\right) \equiv \left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{\Omega M_2}\right) + \left(\overrightarrow{\Omega M_2}\,;\,\Omega M_3\right)$ $[2\pi]$. Sur le graphique, on remarque que $\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{\Omega M_2}\right) \equiv \dfrac{\pi}{6}$ $[2\pi]$ donc $\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{\Omega M_3}\right) \equiv \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{5\pi}{6}$ $[2\pi]$ soit $\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{\Omega M_3}\right) \equiv -\dfrac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$

– Pour placer M_4, on utilise que $\Omega M_4 = 2\Omega M_3 = 2 \times 4 = 8$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M_3}\,;\,\Omega M_4\right) \equiv -\dfrac{5\pi}{6}$ $[2\pi]$. En particulier, $\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{\Omega M_4}\right) \equiv \left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{\Omega M_3}\right) + \left(\overrightarrow{\Omega M_3}\,;\,\Omega M_4\right)$ $[2\pi]$. Or, $\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{\Omega M_3}\right) \equiv -\dfrac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$ donc $\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{\Omega M_4}\right) \equiv \dfrac{-2\pi}{3} - \dfrac{5\pi}{6}$ $[2\pi]$ soit $\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{\Omega M_3}\right) \equiv -\dfrac{3\pi}{2}$ $[2\pi]$ ou encore $\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{\Omega M_3}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$



(b) On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété P_n : "$z_n - i = 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i)$".

- *Initialisation*

  Pour $n = 0$, $2^0 e^{i\frac{7\times 0\times\pi}{6}} = e^{i\times 0} = 1$ donc $z_0 - i = 2^0 e^{i\frac{7\times 0\times\pi}{6}}(z_0 - i)$ est vérifiée et P_0 est vraie.

- *Etape d'hérédité*

  Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose P_n vraie, c'est-à-dire que $z_n - i = 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i)$. Montrons que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que $z_{n+1} - i = 2^{n+1} e^{i\frac{7(n+1)\pi}{6}}(z_0 - i)$.

  On sait que $\Omega M_{n+1} = 2\Omega M_n$ donc $|z_{n+1} - i| = 2|z_n - i|$. De plus, $\left(\overrightarrow{\Omega M_n}\,;\,\overrightarrow{\Omega M_{n+1}}\right) \equiv -\dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$. Or, $\left(\overrightarrow{\Omega M_n}\,;\,\overrightarrow{\Omega M_{n+1}}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z_{n+1} - i}{z_n - i}\right)\ [2\pi]$. Ainsi, $\arg\left(\dfrac{z_{n+1} - i}{z_n - i}\right) \equiv -\dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$. On avait obtenu $|z_{n+1} - i| = 2|z_n - i|$, cela peut aussi s'écrire $\dfrac{|z_{n+1} - i|}{|z_n - i|} = 2$ ou encore $\left|\dfrac{z_{n+1} - i}{z_n - i}\right| = 2$. On en déduit que $Z = \dfrac{z_{n+1} - i}{z_n - i}$ a pour module 2 et pour argument $-\dfrac{5\pi}{6}$ d'où l'écriture exponentielle de Z : $\dfrac{z_{n+1} - i}{z_n - i} = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$ car $-\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{7\pi}{6}$. Ainsi, $z_{n+1} - i = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}(z_n - i)$ et d'après P_n, $z_{n+1} - i = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} \times 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i) = 2^{n+1} e^{i\left(\frac{7\pi}{6} + \frac{7n\pi}{6}\right)}(z_0 - i) = 2^{n+1} e^{i\frac{7(n+1)\pi}{6}}(z_0 - i)$. On a donc justifié que P_{n+1} est vraie.

- *Conclusion*

  D'après le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) $\Omega M_n = |z_n - i| = \left|2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i)\right| = |2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}| \times |z_0 - i|$. Comme $2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}$ correspond à une écriture complexe, le module de ce nombre est 2^n. De plus $|z_0 * i| = \Omega M_0 = \dfrac{1}{2}$ d'après la question 2. Ainsi, $\Omega M_n = 2^n \times \dfrac{1}{2} = 2^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On résout $\Omega M_n \geqslant 10^2 \Leftrightarrow 2^{n-1} \geqslant 10^2 \Leftrightarrow \ln(2^{n-1}) \geqslant \ln(10^2)$ car la fonction ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$. Ainsi, $\Omega M_n \geqslant 10^2 \Leftrightarrow (n-1)\ln(2) \geqslant 2\ln(10)$ et comme $\ln(2) > 0$ (car 2>1) alors $\Omega M_n \geqslant 10^2 \Leftrightarrow n - 1 \geqslant \dfrac{2\,\ln(10)}{\ln(2)} \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{2\,\ln(10)}{\ln(2)} + 1$. Or, $\dfrac{2\,\ln(10)}{\ln(2)} + 1 \simeq 7{,}6$, le plus petit entier naturel n tel que $2^n \geqslant 10^2$ est $n = 8$.

4. (a) On remarque que $7 \times (-5) - 12 \times (-3) = -35 + 36 = 1$ donc le couple $(x_0\,; y_0) = (-5\,; -3)$ est une solution particulière de (E).
Si $(x\,; y)$ est solution de (E) alors $7x - 12y = 1 = 7x_0 - 12y_0$ donc $7x - 7x_0 = 12y - 12y_0$ soit $7(x - x_0) = 12(y - y_0)$. Vu que $y - y_0 \in \mathbb{Z}$ alors 12 est un diviseur de $7(x - x_0)$. De plus, 7 et 12 sont premiers entre eux car 7 est premier et 12 n'est pas un multiple de 7. Ainsi, on peut appliquer le théorème de Gauss et en déduire que 12 divise $x - x_0$. Autrement dit, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - x_0 = 12k$ soit $x = x_0 + 12k = -5 + 12k$. On remplace $x - x_0$ par $12k$ dans l'équation $7(x - x_0) = 12(y - y_0)$, cela donne $7 \times 12k = 12(y - y_0)$ soit $y - y_0 = 7k$ et donc $y = y_0 + 7k = -3 + 7k$. On a ainsi montré que si $(x\,; y)$ est solution de (E), alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(x\,; y) = (-5 + 12k\,; -3 + 7k)$.
Vérifions à présent que tous ces couples sont effectivement solutions de (E). Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $7(-5 + 12k) - 12(-3 + 7k) = -35 + 7 \times 12k + 36 - 7 \times 12k = 1$ donc l'ensemble des solutions de (E) est $\mathcal{S} = \{(-5 + 12k\,; -3 + 7k)\,; k \in \mathbb{Z}\}$.

(b) Les éléments de Δ sont les points M tels que $\left(\vec{u}\,; \overrightarrow{\Omega M}\right) \equiv 0\ [2\pi]$ (ils appartiennent à la demi-droite partant de Ω et de vecteur directeur $\vec{u}$). Il faut ajouter de plus le point Ω à l'ensemble Δ puisque la définition avec les angles exclut le cas $\Omega = M$.
$M_n \in \Delta \Leftrightarrow \left(\vec{u}\,; \overrightarrow{\Omega M_n}\right) \equiv 0\ [2\pi] \Leftrightarrow \arg(z_n - i) \equiv 0\ [2\pi]$. Comme $z_n - i = 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i)$ alors $\arg(z_n - i) \equiv \arg(2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}) + \arg(z_0 - i)\ [2\pi]$. Or, $\arg(2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}) \equiv \dfrac{7n\pi}{6}\ [2\pi]$ (par définition de l'écriture complexe) et $\arg(z_0 - i) \equiv -\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$ (montré à la question 2).
Ainsi, $M_n \in \Delta \Leftrightarrow \dfrac{7n\pi}{6} - \dfrac{\pi}{6} \equiv 0\ [2\pi]$. Cela équivaut au fait qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\frac{(7n-1)\pi}{6} = 2p\pi \Leftrightarrow 7n - 1 = 12p \Leftrightarrow 7n - 12p = 1 \Leftrightarrow (n\,; p) \text{ est solution de } (E)$$

Ainsi, M_n est un point de Δ si et seulement si il existe un entier p tel que $(n\,; p)$ soit solution de (E). D'après la question précente, les entiers n envisageables sont sous la forme $n = -5 + 12k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Réciproquement, si $n = -5 + 12k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, il suffit de choisir $p = -3 + 7k$ pour que $(n\,; p)$ soit solution de (E). On peut donc affirmer que $M_n \in \Delta$ si et seulement si $n \equiv -5\ [12]$. Le plus petit entier naturel qui vérifie cette condition est $n = -5 + 12 = 7$. C'est donc le point M_7 qui se trouvera le premier sur la demi-droite Δ parmi les points M_n.