CORRECTION DU DEVOIR A LA MAISON N° 8

Exercice 1 :

PARTIE A

On représente la courbe de la fonction $g : x \mapsto 8-2x$. Comme g est affine, $\mathcal{C}_g$ est une droite qui passe par $A\,(0\,;\,8)$ et $B\,(4\,;\,0)$ car $g(0)=8$ et $g(4)=8-2\times 4=0$ (voir l'annexe pour le graphique).
Les solutions de $f(x)\leqslant 8-2x \;\Leftrightarrow\; f(x)\leqslant g(x)$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ qui se trouve en dessous de $\mathcal{C}_g$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=[-5\,;\,x_1]$ avec $x_1\simeq 1,7$.

PARTIE B

1. $(x+4)^2-32=x^2+8x+16-32=x^2+8x-16$.
2. $(I) \;\Leftrightarrow\; \dfrac{1}{2}x^2+2x\leqslant 8-2x \;\Leftrightarrow\; \dfrac{1}{2}x^2+2x+2x-8\leqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{1}{2}x^2+4x-8\leqslant 0 \;\Leftrightarrow\; x^2+8x-16\leqslant 0$ (on multiplie par 2). Or, d'après la question précédente, $x^2+8x-16=(x+4)^2-32$. Ainsi, $(I) \;\Leftrightarrow (x+4)^2-32\leqslant 0$.
3. $(x+4)^2-32=(x+4)^2-(\sqrt{32})^2=(x+4-\sqrt{32})(x+4+\sqrt{32})$. De plus, $\sqrt{32}=\sqrt{2\times 16}=4\sqrt{2}$. La forme factorisée de $(x+4)^2-32$ est donc $(x+4-4\sqrt{2})(x+4+4\sqrt{2})$.
4. $(I) \;\Leftrightarrow (x+4-4\sqrt{2})(x+4+4\sqrt{2})\leqslant 0$.
   - Signe de $x+4-4\sqrt{2}$:
     La fonction $x\mapsto x+4-4\sqrt{2}$ est affine de coefficient directeur $a=1>0$, elle est donc croissante sur $\mathbb{R}$.
     On en déduit que $x+4-4\sqrt{2}$ est d'abord négative puis positive.
     De plus, $x+4-4\sqrt{2}=0 \;\Leftrightarrow\; x=-4+4\sqrt{2}$.
   - Signe de $x+4+4\sqrt{2}$:
     La fonction $x\mapsto x+4+4\sqrt{2}$ est affine de coefficient directeur $a=1>0$, elle est donc croissante sur $\mathbb{R}$.
     On en déduit que $x+4+4\sqrt{2}$ est d'abord négative puis positive.
     De plus, $x+4+4\sqrt{2}=0 \;\Leftrightarrow\; x=-4-4\sqrt{2}$.

x	$-\infty$		$-4-4\sqrt{2}$		$4\sqrt{2}-4$		$+\infty$
signe de $x+4-4\sqrt{2}$		$-$	|	$-$	0	$+$	
signe de $x+4+4\sqrt{2}$		$-$	0	$+$	|	$+$	
signe de $(x+4)^2-32$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est donc $\mathcal{S}=[-4-4\sqrt{2}\,;\,4\sqrt{2}-4]$. Si on restreint à $x\in[-5\,;\,5]$, on retrouve les solutions obtenues graphiquement à la question précédente : en effet, $-4-4\sqrt{2}\simeq -9,7$ donc $-4-4\sqrt{2}<-5$ et $4\sqrt{2}-4\simeq 1,7$.

PARTIE C

1. $x=BH$. Comme x est une distance, $x\geqslant 0$. De plus, $H\in[BD]$ donc $BH\leqslant BD$ soit $x\leqslant 4$. Finalement, $x\in[0\,;\,4]$.
2. Comme (MH) est perpendiculaire à (BD), alors BMH est rectangle en H. De plus, la diagonale $[BC]$ du carré $ABCD$ est bissectrice de l'angle $\widehat{ABD}=90°$. Ainsi, $\widehat{MBH}=\dfrac{\widehat{ABD}}{2}=45°$.
   Comme BMH est rectangle en H et que la somme des angles d'un triangle vaut $180°$, alors, dans le triangle BMH, $\widehat{BMH}=180-(\widehat{MHB}+\widehat{MBH})=180-(90+45)=45°$. Finalement, $\widehat{MBH}=\widehat{BMH}$. Le triangle BMH a deux angles de même mesure donc il est isocèle tn H. Finalement, BMH est isocèle rectangle en B.
3. $\mathcal{A}_{ABMH}=\dfrac{(AB+MH)\times BH}{2}$.
   Or, $AB=4$, $BH=x$, et comme BMH est isocèle en H, $MH=BH=x$. Finalement,
$$\mathcal{A}_{ABMH}=\frac{x(4+x)}{2}=\frac{4x+x^2}{2}=\frac{1}{2}x^2+2x$$

4. Dans le triangle DCM, si on prend pour base la longueur CD, alors la hauteur vaut DH.
   Or, $DH = DB - BH = 4 - x$. Ainsi, $\mathcal{A}_{DCM} = \dfrac{CD \times DH}{2} = \dfrac{4(4-x)}{2} = 2(4-x) = 8 - 2x$.
5. On cherche à résoudre $\mathcal{A}_{ABHM} \leqslant \mathcal{A}_{DCM} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}x^2 + 2x \leqslant 8 - 2x$. On retrouve l'inéquation (I) résolue dans les parties A et B. Ici, $x \in [0\,;4]$ donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = [0\,; 4\sqrt{2} - 4]$ avec $4\sqrt{2} - 4 \simeq 1,7$. L'ensemble des valeurs de x recherchées est l'ensemble des nombres x appartenant à $[0\,; 4\sqrt{2} - 4]$.

Exercice 2 :

1. On note B_1 l'événement : "on tire la boule numérotée 1", B_1 l'événement : "on tire la boule numérotée 2" et B_3 l'événement : "on tire la boule numérotée 3." Voir l'annexe pour l'arbre : l'arbre comporte $3 \times 3 \times 2 = 18$ branches donc on peut constituer 18 nombres différents (notés en fin de branche).
2. Comme les boules sont indiscernables au toucher, la situation est équiprobable. On note Ω l'ensemble de tous les nombres possibles obtenus : $\text{card}(\Omega) = 18$. On note A l'événement "le nombre obtenu est supérieur ou égal à 232. D'après l'arbre, $\text{card}(A) = 7$ et $P(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{7}{18}$.
3. (a) Les issues possibles sont : 4, 5, 6, 7 et 8 (voir l'arbre pondéré).

   (b) On note S_i l'événement "la somme des nombres est égale à i". Alors, $P(S_4) = \dfrac{\text{card}(S_4)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{2}{18} = \dfrac{1}{9}$; $P(S_5) = \dfrac{\text{card}(S_5)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{4}{18} = \dfrac{2}{9}$; $P(S_6) = \dfrac{\text{card}(S_6)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{6}{18} = \dfrac{1}{3}$; $P(S_7) = \dfrac{\text{card}(S_7)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{4}{18} = \dfrac{2}{9}$; $P(S_8) = \dfrac{\text{card}(S_8)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{2}{18} = \dfrac{1}{9}$. On peut résumer la loi de probabilité associée à la somme de nombres par le tableau suivant :

x_i	4	5	6	7	8
p_i	$\dfrac{1}{9}$	$\dfrac{2}{9}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{2}{9}$	$\dfrac{1}{9}$

   (c) Un nombre est un multiple de 3 lorsque la somme de ses chiffres est un multiple de 3. Parmi les nombres de 4 à 8, le seul multiple de 3 est 6 donc la probabilité cherchée est $P(S_6) = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 3 :

1. – Pour $x = -6$, $y = -6 + 1 = -5$ puis $y = (-5)^2 = 25$ puis $y = 5 - 3 \times 25 = -70$
   – Pour $x = -3$, $y = -2$ puis $y = (-2)^2 = 4$ puis $y = 5 - 3 \times 4 = -7$
   – Pour $x = -1$, $y = -1 + 1 = 0$ puis $y = 0$ puis $y = 5 - 0 = 5$
   – Pour $x = 2$, $y = 2 + 1 = 3$ puis $y = 3^2 = 9$, puis $y = 5 - 3 \times 9 = -40$
   – Pour $x = 5$, $y = 5 + 1 = 6$ puis $y = 6^2 = 36$ puis $y = 5 - 3 \times 36 = 5 - 180 = -175$

x	-6	-3	-1	2	5
y	-70	-7	5	-40	-175

2. y prend successivement les valeurs $x + 1$, puis $(x+1)^2$ et $5 - 3(x+1)^2$. Ainsi, $f(x) = 5 - 3(x+1)^2$.
3. • Montrons que f est croissante sur $]-\infty\,; -1]$
   Soit un couple de nombres $(x_1\,; x_2)$ appartenant à $]-\infty\,; -1]$ et tels que $x_1 < x_2$.
   On sait que $x_1 < x_2 \leqslant -1$. Ainsi, $x_1 + 1 < x_2 + 1 \leqslant 0$. Comme la fonction carrée est décroissante sur $]-\infty\,; 0]$ alors $(x_1+1)^2 \geqslant (x_2+1)^2$. On multiplie par $-3 < 0$: $-3(x_1+1)^2 \leqslant -3(x_2+1)^2$. On ajoute 5 : $5 - 3(x_1+1)^2 \leqslant 5 - 3(x_2+1)^2$ soit $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
   On a ainsi montré que f est croissante sur $]-\infty\,; -1]$.
   • Montrons que f est décroissante sur $[-1\,; +\infty[$
   Soit un couple de nombres $(x_1\,; x_2)$ appartenant à $[-1\,; +\infty[$ et tels que $x_1 < x_2$.
   On sait que $-1 \leqslant x_1 < x_2$. Ainsi, $0 < x_1 + 1 < x_2 + 1$. Comme la fonction carrée est croissante sur $[0\,; +\infty[$ alors $(x_1+1)^2 \leqslant (x_2+1)^2$. On multiplie par $-3 < 0$: $-3(x_1+1)^2 \geqslant -3(x_2+1)^2$. On ajoute 5 : $5 - 3(x_1+1)^2 \leqslant 5 - 3(x_2+1)^2$ soit $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.
   On a ainsi montré que f est décroissante sur $]-\infty\,; -1]$.