CORRECTION DU DEVOIR A LA MAISON N° 5

Exercice 1 :

PARTIE A

1. On remarque que $7\times1+6\times(-1)=7-6=1$ donc le couple $(x_0\,;\,y_0)=(1\,;\,-1)$ n'est pas solution de (E).

2. $(x\,;\,y)\in\mathbb{Z}^2$ est solution de (E) si et seulement si $7x+6y=1=7x_0+6y_0$ ce qui équivaut à $7(x-x_0)=6(y_0-y)$ (F). Si $(x\,;\,y)$ est solution de (E), comme $y_0-y\in\mathbb{Z}$, alors 6 divise $7(x-x_0)$. De plus, $7=6+1$ donc à l'aide du lemme d'Euclide, $PGCD(7\,;\,6)=PGCD(6\,;\,1)=1$. D'après le théorème de Gauss, on en déduit que 6 divise $x-x_0$, autrement dit, il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x-x_0=6k$ soit $x=x_0+6k=1+6k$. En remplaçant dans l'équation (F), cela donne : $7\times6k=6(y_0-y)$ soit $y_0-y=7k$ d'où $y=y_0-7k=-1-7k$. On a donc justifié que si $(x\,;\,y)$ est solution de (E), alors il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $(x\,;\,y)=(1+6k\,;\,-1-7k)$.
Vérification de la réciproque : pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $7(1+6k)+6(-1-7k)=7+42k-6-42k=1$ donc l'ensemble des solutions de (E) est $\mathcal{S}=\{(1+6k\,;\,-1-7k)\,;\,k\in\mathbb{Z}\}$.

PARTIE B

1. $7^n-3\times2^m=1 \;\Leftrightarrow\; 7\times7^{n-1}-3\times2\times2^{m-1}=1 \;\Leftrightarrow\; 7\times(7^{n-1})-6\times(2^{m-1})=1$. Comme n est un entier naturel non nul, $n-1\geqslant0$ donc $7^{n-1}\in\mathbb{N}$. De même, m est un entier naturel non nul donc $2^{m-1}\in\mathbb{N}$. Ainsi, $(7^{n-1}\,;\,-2^{m-1})$ est un couple d'entiers relatifs solution de (E) : $7x+6y=1$. D'après la partie A, il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $7^{n-1}=1+6k$ et $-2^{m-1}=-1-7k$ soit $2^{m-1}=1+7k$. Comme $m\leqslant4$ alors $m-1\leqslant3$ d'où $2^{m-1}\leqslant2^3$. De plus, $m-1\geqslant0$ donc $2^{m-1}\geqslant1$. On cherche donc k entier tel que $1\leqslant1+7k\leqslant8 \;\Leftrightarrow\; 0\leqslant7k\leqslant7 \;\Leftrightarrow\; 0\leqslant k\leqslant1$. Les deux valeurs envisageables de k sont donc $k=0$ et $k=1$.
Si $k=0$, $2^{m-1}=1=2^0$ donc $m=1$ et $7^{n-1}=1+6k=1=7^0$ donc $n=1$.
Si $k=1$, $2^{m-1}=1+7k=8=2^3$ donc $m-1=3$ et $m=4$ et $7^{n-1}=1+6k=7=7^1$ donc $n-1=1$ soit $n=2$. Les deux couples solutions $(n\,;\,m)$ sont donc $(1\,;\,1)$ et $(2\,;\,4)$.

2. (a) Si $(n\,;\,m)$ vérifie la relation (F) alors $7^n-1=3\times2^m=3\times2^5\times2^{m-5}$. Comme $m\geqslant5$, alors $m-5\geqslant0$ et $2^{m-5}\in\mathbb{N}$ donc $3\times2^{m-5}\in\mathbb{N}$. Ainsi, $3\times2^5\times2^{m-5}$ est divisible par $2^5=32$ soit 7^n-1 est divisible par 32, ce qui s'écrit encore $7^n\equiv1\ [32]$.

   (b) $7^0=1\equiv1\ [32]$; $7^1=7\equiv7\ [32]$; $7^2=49=32+17$ donc $7^2\equiv17\ [32]$; $7^3\equiv7\times17\ [32]$ soit $7^3\equiv119\ [32]$. Or, $119=32\times4-9$ donc $119\equiv-9\ [32]$ puis $7^3\equiv-9\ [32]$; $7^4\equiv7\times-9\ [32]$ soit $7^4\equiv-63\ [32]$. Or, $-63=-32\times2+1$ d'où $7^4\equiv1\ [32]$.
   Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on effectue la division euclidienne de n par 4 : il existe $(q\,;\,r)\in\mathbb{N}^2$ tel que $n=4q+r$ avec $0\leqslant r<4$. On a alors $7^n=7^{4q+r}=(7^4)^q\times7^r$ et $7^4\equiv1\ [32]$ donc $(7^4)^q\equiv1\ [32]$ puis $7^n\equiv7^r\ [32]$.
   – Si $n\equiv0[4]$, alors $r=0$ et $7^n\equiv7^0\ [32]$ soit $7^n\equiv1\ [32]$. Le reste de la division euclidienne de 7^n par 4 vaut alors 1.
   – Si $n\equiv1\ [4]$, alors $r=1$ et $7^n\equiv7^1\ [32]$ soit $7^n\equiv7\ [32]$. Le reste de la division euclidienne de 7^n par 4 vaut alors 7.
   – Si $n\equiv2\ [4]$, alors $r=2$ et $7^n\equiv7^2\ [32]$ soit $7^n\equiv17\ [32]$. Le reste de la division euclidienne de 7^n par 4 vaut alors 17.
   – Si $n\equiv3\ [4]$, alors $r=3$ et $7^n\equiv7^3\ [32]$ soit $7^n\equiv-9\ [32]$ Comme $-9=-32+23$ alors $-9\equiv23\ [32]$ et $7^n\equiv23\ [32]$. Le reste de la division euclidienne de 7^n par 4 vaut alors 23.

   D'après la question précédente, si $(n\,;\,m)$ est solution de (F) alors $7^n\equiv1\ [32]$ donc le reste de la division euclidienne de 7^n par 32 vaut 1. D'après l'étude de cas précédente, ceci est vérifié seulement pour $n\equiv0\ [4]$ donc n est divisible par 4.

(c) On peut supposer que n est un multiple de 4 d'après la question précédente. Ainsi, il exsite $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 4k$. Alors $7^n = \left(7^4\right)^k$. Or, $7 = 5 + 2$ donc $7 \equiv 2\ [5]$ puis $7^4 \equiv 2^4\ [5]$. Comme $2^4 = 16 = 3 \times 5 + 1$ alors $2^4 \equiv 1\ [5]$ puis $7^4 \equiv 1\ [5]$ et en élevant à la puissance k : $7^n \equiv 1\ [5]$.

(d) Si $(n\,;\,m)$ est solution de (F), alors $3 \times 2^m = 7^n - 1$. Comme $7^n = 1\ [5]$ pour $m \geqslant 5$, alors $3 \times 2^m \equiv 0\ [5]$, autrement dit 5 divise 3×2^m. Or, 3×2^m est une décomposition en produit de facteurs premiers ; 5 n'apparait pas dans la décomposition donc 5 ne peut pas diviser 3×2^m. On aboutit donc à une contradiction qui montre qu'il n'existe pas de couples $(n\,;\,m)$ solution de (F) pour $m \geqslant 5$.

3. On a obtenu seulement deux couples solutions à l'équation (F) dans le cas où $m \leqslant 4$. L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \{(1\,;\,1)\,;\,(2\,;\,4)\}$

Exercice 2 :

1. (a) $17 \times 9 - 24 \times 6 = 153 - 144 = 9$ donc le couple $(6\,,\,9)$ est solution de $17y - 24x = 9$.

   (b) $(x\,,\,y)$ est solution de $(\mathcal{E}) \Leftrightarrow 17y - 24x = 17y_0 - 24x_0$ où $(x_0\,,\,y_0) = (6\,,\,9)$ est la solution particulière obtenue au 1.a). Ainsi, $(x\,,\,y)$ est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si $17(y - y_0) = 24(x - x_0)$. Comme $y - y_0 \in \mathbb{Z}$, si $17(y - y_0) = 24(x - x_0)$ alors $17 \,|\, 24(x - x_0)$. 17 étant un nombre premier, ses seuls diviseurs positifs sont 1 et 17 donc $PGCD(17\,,\,24)$ ne peut valoir que 1 ou 17. Comme 24 n'est pas divisible par 17, $PGCD(17\,,\,24) = 1$. D'après le théorème de Gauss, on en déduit que $17 \,|\, x - x_0$. Par conséquent, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - x_0 = 17k$ donc $x = 6 + 17k$ et en remplaçant dans $17(y - y_0) = 24(x - x_0)$, cela donne $17(y - y_0) = 24 \times 17k$ d'où $y - y_0 = 24k$ soit $y = 9 + 24k$. On a donc démontré que si $(x\,,\,y)$ est une solution de $(\mathcal{E})$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 6 + 17k$ et $y = 9 + 24k$.
   Vérifions réciproquement que tout couple du type $(6+17k\,,\,9+24k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ est solution de $(\mathcal{E})$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $17(9+24k)-24(6+17k) = 17\times9+17\times24k-24\times6-24\times17k = 17\times9-24\times6 = 9$.
   L'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est donc $\mathcal{S} = \{(6 + 17k\,,\,9 + 24k)\,,\,k \in \mathbb{Z}\}$.

2. (a) A l'instant t, Jean a parcouru la distance de H à A puis x tours de manège. Un tour de manège dure 24s. Comme le manège tourne à vitesse constante, il relie chaque point du cercle (et il y en a 8) en $\dfrac{24}{8} = 3$ secondes. Jean relie donc le point H au point A en $3 \times 3 = 9$ secondes. Comme il fait x tours de manège et que chacun dure 24 secondes, alors $t = 9 + 24x$.
   Pendant ce même temps, le pompon a parcouru y fois le carré et chaque tour dure 17 secondes donc $t = 17y$. Ainsi, $t = 9 + 24x = 17y$ d'où $17y - 24x = 9$, ce qui signifie que $(x\,,\,y)$ est solution de $(\mathcal{E})$.

   (b) Jean aura le temps d'attraper le pompon si et seulement si $t \leqslant 120$ (car 2 minutes correspond à 120 secondes). Comme $(x\,,\,y)$ est solution de $(\mathcal{E})$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$, $y = 9 + 24k$. Vu que $t = 17y$, on obtient donc $17y \leqslant 120 \Leftrightarrow 9 + 24k \leqslant \dfrac{120}{17} \Leftrightarrow 24k \leqslant \dfrac{120}{17} - 9$ soit $k \leqslant \dfrac{5}{17} - \dfrac{3}{8}$. Or, $\dfrac{5}{17} - \dfrac{3}{8} \simeq -0,08$ d'où $t \leqslant 120 \Leftrightarrow k < 0$ (car $k \in \mathbb{Z}$.) On sait de plus que $t > 0$. Or, si $k < 0$ alors $k \leqslant -1$ et$y = 9 + 24k \leqslant 9 - 24 < 0$. y est un nombre de tours donc il ne peut pas être négtif. On en déduit que la condition $t \leqslant 120$ est impossible donc Jean n'aura pas le temps d'attraper le pompon.

   (c) – Supposons que Jean attrape le pompon au point B à un certain temps t_1. Pour aller de H (point de départ de Jean) à B, Jean met $5 \times 3 + 24x$ secondes où x est le nombre de tours entiers effectués par le manège entre $t = 0$ et t_1. Quant au pompon, il met $\dfrac{17}{4} + 17y$ secondes en partant de A où x est le nombre de tours de carré effectués par le pompon entre $t = 0$ et t_1. On obtiendrait donc $t_1 = 15 + 24x = \dfrac{17}{4} + 17y$. Dans ce cas : $\dfrac{17}{4} = 15 + 24x - 17y$. Comme x et y sont des nombres entiers, il en est de même de $15 + 24x - 17y$. Or, $\dfrac{17}{4} \notin \mathbb{Z}$. On aboutit donc à un contradiction.
   – Si Jean attrape le pompon au point C à l'instant t_2, en raisonnant comme précédemment, on obtient une équation du type $t_2 = 7 \times 3 + 24x = \dfrac{17}{6} + 17y$ avec $(x\,,\,y) \in \mathbb{Z}^2$ ce qui contredit le fait que $\dfrac{17}{6} \notin \mathbb{Z}$.

– De même, si Jean attrape le pompon au point D à l'instant t_3, on obtient une équation du type $t_3 = 3 + 24x = \frac{3}{4}17 + 17y$ et on obtient la même contradiction qui précédemment.

Comme il n'est pas possible d'attraper le pompon en B, C et D, alors il n'est possible d'attraper le pompon qu'au point A.

(d) Si Jean part du point E et qu'il attrape le pompon en A à l'instant t_4, alors $t_4 = 3 + 24x$ où x est le nombre de tours effectués par le manège entre $t = 0$ et t_4. Quant au manège, il aura mis $17y$ secondes entre $t = 0$ et t_4 où y correspond au nombre de tours effectués par le pompon sur le carré. Ainsi, $t_4 = 3 + 24x = 17y$ et $(x\,,\,y)$ est solution de $(\mathcal{E}')\ : 17y - 24x = 3$.
On a vu que $(x_0\,,\,y_0) = (6\,,\,9)$ est solution de $17y - 24x = 9$ donc en divisant par 3, $17 \times 3 - 24 \times 2 = 3$ d'où $(x_1\,,\,y_1) = (2\,,\,3)$ est solution de $(\mathcal{E}')$. En particulier pour ces valeurs de x, on obtient $t_4 = 17 \times 3 = 51s$. Cela signifie qu'au bout de 51 secondes, Jean pourra attraper le pompon au point A, donc Jean pourra attraper le pompon en moins de deux minutes s'il part du point E.