CORRECTION DU DEVOIR A LA MAISON N° 5

Exercice 1 :

1. (a) $(x-5)^2-9 = x^2-10x+25-9 = x^2-10x+16$

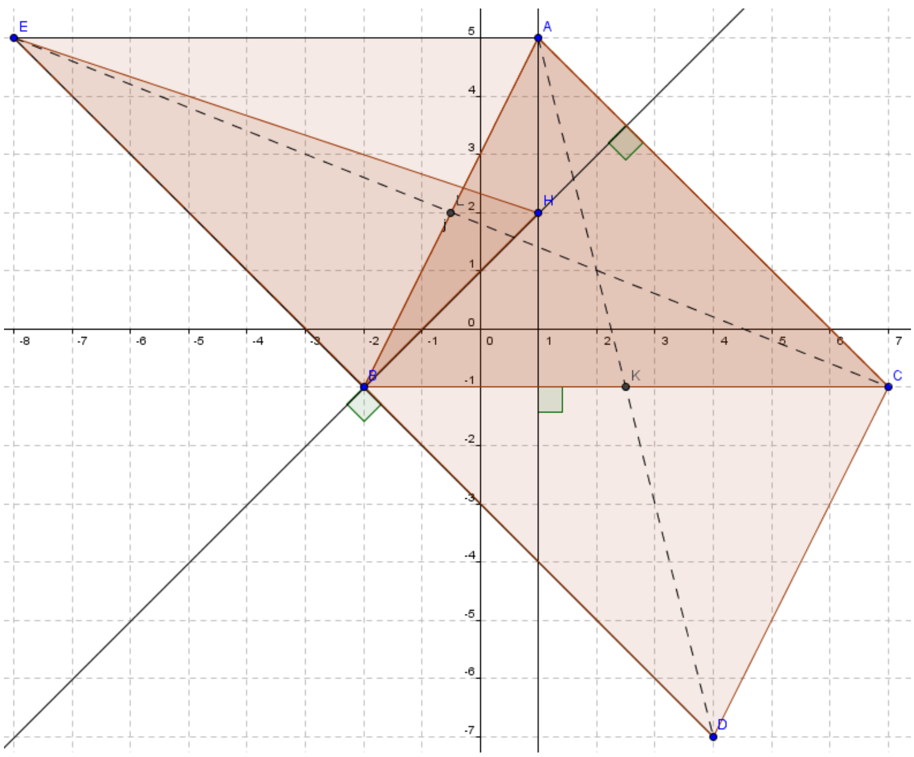
   (b)
$$\begin{aligned} x^2-10x+16=0 &\Leftrightarrow (x-5)^2-9=0 \Leftrightarrow (x-5)^2-3^2=0 \\ &\Leftrightarrow [(x-5)-3][(x-5)+3]=0 \Leftrightarrow (x-8)(x-2)=0 \end{aligned}$$
   Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ces facteurs est nul.
$$x^2-10x+16=0 \Leftrightarrow x-8=0 \text{ ou } x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ou } x=8$$

2. D'après le théorème de Pythagore et sa réciproque, on peut affirmer l'équivalence suivante : AEF est rectangle en F si et seulement si $AE^2 = AF^2 + EF^2$.
   - Le triangle ADE est rectangle en D (car $ABCD$ est un carré) donc d'après le théorème de Pythagore, $AE^2 = AD^2 + DE^2$. Or, $AD = 10$ et $DE = DC - EC = 10 - 1,6 = 8,4$.
     Ainsi, $AE^2 = 100 + 8,4^2 = 170,56$.
   - ABF est rectangle en B (car $ABCD$ est un carré) donc $AF^2 = AB^2 + BF^2$ d'après le théorème de Pythagore. Ainsi, $AF^2 = 10^2 + x^2 = 100 + x^2$.
   - Le triangle EFC est rectangle en C (car $ABCD$ est un carré) d'où $EF^2 = EC^2 + CF^2$ d'après le théorème de Pythagore. Or, $EC = 1,6$ et $FC = BC - BF = 10 - x$.
     Ainsi, $EF^2 = 1,6^2 + (10-x)^2 = 2,56 + 100 - 20x + x^2 = x^2 - 20x + 102,56$.

$$\begin{aligned} AE^2 = AF^2 + EF^2 &\Leftrightarrow 170,56 = 100 + x^2 + x^2 - 20x + 102,56 \Leftrightarrow 2x^2 - 20x + 202,56 - 170,56 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 20x + 32 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \end{aligned}$$

   D'après la question 1, cette dernière équation admet pour solution $x = 2$ et $x = 8$.
   On en déduit que AEF est rectangle en F si et seulement si $x = 2$ ou $x = 8$.

Exercice 2 :



1. • $ABDC$ est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales $[BC]$ et $[AD]$ se coupent en leur milieu. On note K le milieu de $[BC]$. On sait alors que $x_K = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{-2+7}{2} = \dfrac{5}{2}$ et $y_K = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{-1-1}{2} = -1$. Ainsi, $K\left(\dfrac{5}{2}\,;\,-1\right)$. K est le milieu de $[AD]$ si et seulement si :

$$\begin{cases} x_K = \dfrac{x_A + x_D}{2} \\ y_K = \dfrac{y_A + y_D}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5}{2} = \dfrac{1 + x_D}{2} \\ -1 = \dfrac{5 + y_D}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 1 + x_D \\ -2 = 5 + y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 5 - 1 = 4 \\ y_D = -2 - 5 = -7 \end{cases}$$

   Finalement, $D\,(4\,;\,-7)$.

   • $ACBE$ est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales $[AB]$ et $[CE]$ se coupent en leur milieu. On note L le milieu de $[AB]$. On sait alors que $x_L = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{1-2}{2} = -\dfrac{1}{2}$ et $y_L = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{5-1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$. Ainsi, $L\left(-\dfrac{1}{2}\,;\,2\right)$. L est le milieu de $[CE]$ si et seulement si :

$$\begin{cases} x_L = \dfrac{x_C + x_E}{2} \\ y_L = \dfrac{y_C + y_E}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2} = \dfrac{7 + x_E}{2} \\ 2 = \dfrac{-1 + y_E}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 7 + x_E \\ 4 = -1 + y_E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = -1 - 7 = -8 \\ y_E = 4 + 1 = 5 \end{cases}$$

   Finalement, $E\,(-8\,;\,5)$.

2. $HB^2 = (x_B - x_H)^2 + (y_B - y_H)^2 = (-2-1)^2 + (-1-2)^2 = 9 + 9 = 18$
   $BE^2 = (x_E - x_B)^2 + (y_E - y_B)^2 = (-8+2)^2 + (5+1)^2 = 36 + 36 = 72$
   $EH^2 = (x_H - x_E)^2 + (y_H - y_E)^2 = (1+8)^2 + (2-5)^2 = 81 + 9 = 90.$
   On constate que $HB^2 + BE^2 = 18 + 72 = 90 = EH^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on peut donc en déduire que HBE est rectangle en B.

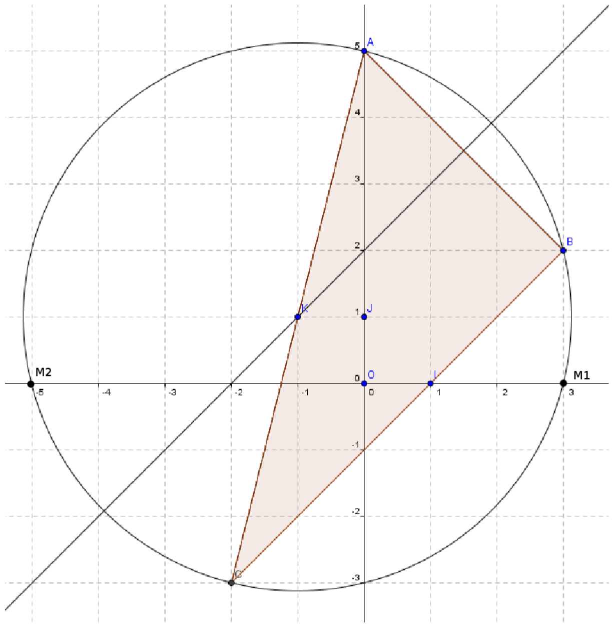
3. Comme $ACBE$ est un parallélogramme alors $EB = AC$ et (EB) est parallèle à (AC). De même, $ABDC$ est un parallélogramme, d'où $AC = BD$ et (AC) est parallèle à (BD). Finalement, $EB = AC = BD$ et (EB) est parallèle à (BD) en utilisant la propriété : "lorsque deux droites sont parallèles à une même troisième droite alors elles sont parallèles entre elles". Les droites (EB) et (BD) sont parallèles et possèdent un point en commun donc elles sont confondues. Ainsi, $B \in (ED)$ avec $EB = BD$. Cela signifie que B est le milieu de $[ED]$.
   Le triangle HBE étant rectangle en B, alors (HB) est perpendiculaire à $(BE) = (ED)$. (HB) coupe $[ED]$ perpendiculairement et en son milieu donc (HB) est la médiatrice de $[ED]$.

4. On vient de justifier que (BH) est perpendiculaire à (EB). Or, on a remarqué que (EB) est parallèle à (AC) puisque $ACBE$ est un parallélogramme. On en déduit que (BH) est également perpendiculaire à (AC). Autrement dit, le point H se trouve sur la hauteur du triangle ABC issue de B.

   Comme $x_H = x_A = 1$ alors la droite (AH) est parallèle à l'axe des ordonnées. On sait également que $y_B = y_C = -1$ donc (BC) est parallèle à l'axe des abscisses. Le repère étant orthonormé, il est en particulier orthogonal et l'axe des abscisses est perpendiculaire à l'axe des ordonnées. On en déduit que (AH) est perpendiculaire à (BC). Autrement dit, le point H est sur la hauteur du triangle ABC issue de A. Les trois hauteurs d'un triangle sont concourrantes en un point appelé orthocentre de ce triangle ; le point H est alors nécessairement ce point de concours pour le triangle ABC (car il est sur deux des hauteurs de ce triangle) donc H est l'orthocentre du triangle ABC.

Exercice 3 :

1. Figure :



2.
$$\begin{array}{rcl} KA & = & \sqrt{(x_A - x_K)^2 + (y_A - y_K)^2} = \sqrt{(0+1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17} \\ KB & = & \sqrt{(x_B - x_K)^2 + (y_B - y_K)^2} = \sqrt{(3+1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17} \end{array}$$

Comme $KA = KB$, alors K est équidistant des points A et B. Ainsi, K est sur la médiatrice de $[AB]$.

3. C est le symétrique de A par rapport au point K signifie que K est le milieu de $[AC]$. Ainsi,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_K = \dfrac{x_A + x_C}{2} \\ y_K = \dfrac{y_A + y_C}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -1 = \dfrac{0 + x_C}{2} \\ 1 = \dfrac{5 + y_C}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_C = -2 \\ 5 + y_C = 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_C = -2 \\ y_C = -3 \end{array} \right.$$

Finalement, $C\,(-2\,;\,-3)$.

4. (a) On a déjà montré que $KA = KB$. De plus, K est le milieu de $[AC]$ donc $KA = KC$. Finalement, $KA = KB = KC$, ce qui signifie que $[KA]$, $[KB]$ et $[KC]$ sont trois rayons d'un même cercle. Autrement dit, A, B et C sont sur un même cercle de centre K. Le rayon est alors $KA = \sqrt{17}$.

   (b) Comme K est le milieu de $[AC]$ et que B est sur le cercle de centre K qui passe par A et C alors B est sur le cercle de diamètre $[AC]$. Cela signifie que ABC est rectangle en B.

5. On cherche les points d'intersection $M(x\,;\,y)$ entre l'axe des abscisses et le cercle $\mathcal{C}$. Comme M est sur l'axe des abscisses alors $y = 0$. Dire que M est sur $\mathcal{C}$ signifie que $KM = \sqrt{17}$, c'est-à-dire $KM^2 = 17$ (car KM et $\sqrt{17}$ sont positifs). Or, $KM^2 = (x_M - x_K)^2 + (y_M - y_K)^2 = (x+1)^2 + (0-1)^2 = (x+1)^2 + 1$. Ainsi,

$$KM^2 = 17 \Leftrightarrow (x+1)^2 + 1 = 17 \Leftrightarrow (x+1)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x+1-4)(x+1+4) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+5) = 0$$

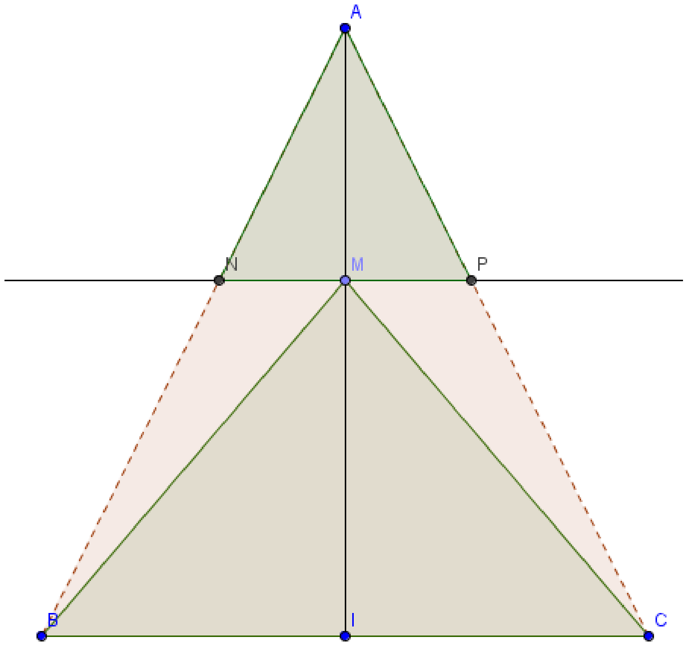
Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. Ainsi,

$$KM^2 = 17 \quad \Leftrightarrow \quad x - 3 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -5$$

L'axe des abscisses coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points : $M_1\,(3\,;\,0)$ et $M_2\,(-5\,;\,0)$.

Exercice 4 :

1. Figure :



2. On sait que $x = MI$ donc $x \geqslant 0$ car une distance est toujours positive. De plus, $M \in [AI]$ d'où $MI \leqslant AI$ soit $x \leqslant 8$. Finalement, $x \in [0\,;\,8]$.

3. On calcule l'aire du triangle MBC. Comme I est le milieu de $[BC]$ alors la droite (AI) est une médiane du triangle ABC. Comme ABC est isocèle en A, alors la médiane issue de A est confondue avec la hauteur issue de A du triangle ABC. Ainsi, $(MI) = (AI)$ est perpendiculaire à (BC) et (MI) est une hauteur de MBC et $\mathcal{A}_{MBC} = \dfrac{BC \times MI}{2} = \dfrac{8x}{2} = 4x$.

   Comme (BC) est parallèle à (NP) et que $(AM) = (MI)$ est perpendiculaire à (BC) alors (AM) est perpendiculaire à (NP). On peut donc affirmer que (AM) est une hauteur du triangle ANP donc l'aire de ce triangle est $\mathcal{A}_{ANP} = \dfrac{NP \times AM}{2}$. Or, $AM = AI - MI = 8 - x$.

   Les droites (BN) et (CM) sont sécantes en A et (NP) est parallèle à (BC) donc d'après le théorème de Thalès, $\dfrac{AN}{AB} = \dfrac{NP}{BC}$. De même, les droites (BN) et (MI) sont sécantes en A. De plus, on sait que $(NM) = (NP)$ est parallèle à $(BI) = (BC)$. D'après le théorème de Thalès, $\dfrac{AM}{AI} = \dfrac{AN}{AB}$.

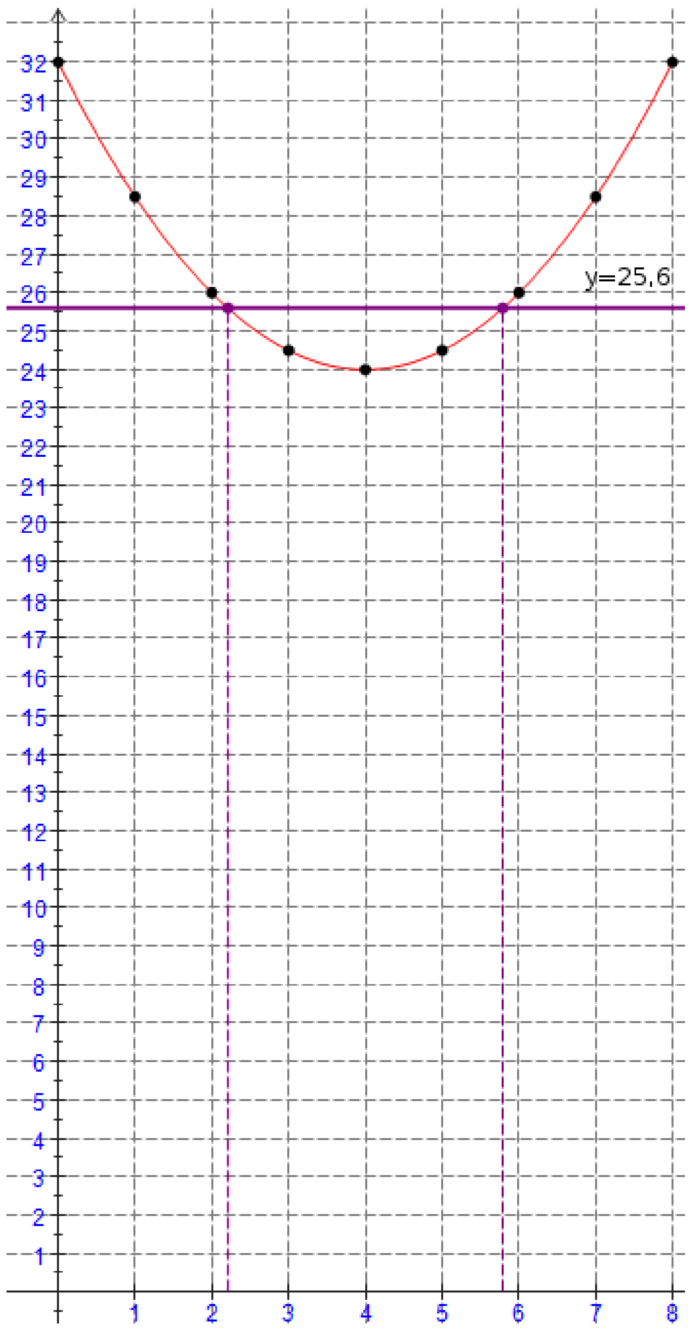
   On en déduit que $\dfrac{AN}{AB} = \dfrac{NP}{BC} = \dfrac{AM}{AI}$ donc $NP = \dfrac{AM \times BC}{AI} = \dfrac{(8-x) \times 8}{8} = 8 - x$.

   Ainsi, $\mathcal{A}_{ANP} = \dfrac{NP \times AM}{2} = \dfrac{(8-x)(8-x)}{2} = \dfrac{(8-x)^2}{2}$.

   Finalement, $f(x) = \mathcal{A}_{MBC} + \mathcal{A}_{ANP} = 4x + \dfrac{(8-x)^2}{2}$

4. (a) Tableau de valeurs :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	32	28,5	26	24,5	24	24,5	26	28,5	32



(b) L'aire du triangle ABC est

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{BC \times AI}{2} = \frac{8 \times 8}{2} = 32$$

Comme $\frac{80}{100} \times 32 = 25,6$, on cherche à résoudre $f(x) = 25,6$. Les solutions de $f(x) = 25,6$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ dont l'ordonnée vaut 25,6.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{x_1\,;\,x_2\}$ avec $x_1 \simeq 2,2$ et $x_2 \simeq 5,8$. Pour que l'aire du sapin corresponde à 80% de l'aire du triangle ABC, il faut choisir M tel que $MI \simeq 2,2$ ou $MI \simeq 5,8$.

5. (a) D'une part, $f(x) = 4x + \frac{(8-x)^2}{2} = \frac{8x + 64 - 16x + x^2}{2} = \frac{x^2 - 8x + 64}{2}$.

D'autre part, $\frac{1}{2}\left[(x-4)^2 + 48\right] = \frac{(x-4)^2 + 48}{2} = \frac{x^2 - 8x + 16 + 48}{2} = \frac{x^2 - 8x + 64}{2}$. On obtient le même résultat pour les deux calculs donc $f(x) = \frac{1}{2}\left[(x-4)^2 + 48\right]$.

(b) On cherche à résoudre algébriquement $f(x) = 25,6$. Cette équation équivaut à :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left[(x-4)^2 + 48\right] = 25,6 \quad &\Leftrightarrow \quad (x-4)^2 + 48 = 25,6 \times 2 = 51,2 \ \Leftrightarrow\ (x-4)^2 + 48 - 51,2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x-4)^2 - 3,2 = 0 \ \Leftrightarrow\ (x-4)^2 - \frac{32}{10} = 0 \ \Leftrightarrow\ (x-4)^2 - \frac{16}{5} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(x - 4 - \sqrt{\frac{16}{5}}\right)\left(x - 4 + \sqrt{\frac{16}{5}}\right) = 0
\end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement l'un des facteurs est nul, on obtient donc : $x - 4 - \sqrt{\frac{16}{5}} = 0$ ou $x - 4 + \sqrt{\frac{16}{5}} = 0$. Or, $x - 4 - \sqrt{\frac{16}{5}} = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 4 + \frac{4}{\sqrt{5}} = 4 + \frac{4\sqrt{5}}{5}$ et

$x-4+\sqrt{\dfrac{16}{5}}=0 \Leftrightarrow x=4-\dfrac{4}{\sqrt{5}}=4-\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\{4+\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\ ;\ 4-\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\}$.
Or, $4+\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\simeq 5,8$ et $4-\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\simeq 2,2$ donc $x_1=4-\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ et $x_2=4+\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$. On a trouvé les valeurs exactes de MI pour lesquelles l'aire du sapin soit égale à 80% de l'aire du triangle ABC.