CORRECTION DU DEVOIR A LA MAISON N° 4

Exercice 1 :

1. $u_1 = 10\,u_0 + 21 = 10 + 21 = 31$; $u_2 = 10\,u_1 + 21 = 310 + 21 = 331$; $u_3 = 10\,u_2 + 21 = 3310 + 21 = 3331$.

2. (a) On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété P_n : "$3u_n = 10^{n+1} - 7$.

   — *Initialisation* pour $n = 0$, $3u_0 = 3 \times 1 = 3$ et $10^{0+1} - 7 = 10 - 7 = 3$. Comme $3u_0 = 10^{0+1} - 7$, alors la propriété P_0 est vraie.

   — *Etape d'hérédité* On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que P_n est vraie, c'est-à-dire que $3u_n = 10^{n+1} - 7$. Montrons que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que $3u_{n+1} = 10^{n+2} - 7$.

   $3u_{n+1} = 3(10u_n + 21) = 30\,u_n + 63 = 10 \times 3u_n + 63$. Or, d'après P_n, $3u_n = 10^{n+1} - 7$ d'où $3u_{n+1} = 10(10^{n+1} - 7) + 63 = 10^{n+2} - 70 + 63 = 10^{n+2} - 7$. La propriété P_{n+1} est donc vraie.

   — *Conclusion* D'après le principe de récurrence, $3u_n = 10^{n+1} - 7$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) L'écriture décimale du nombre 10^{n+1} est composée d'un chiffre 1 et de $n+1$ chiffres 0. Ainsi, $10^{n+1} - 7$ s'écrit au total avec $n+1$ chiffres : $\underbrace{99...9}_{n \text{ chiffres } 9}3$ donc $3u_n = \underbrace{99...9}_{n \text{ chiffres } 9}3$ puis $u_n = \underbrace{33...3}_{n \text{ chiffres } 3}1$

   Autrement dit, $10^{n+1} - 7 = 9 \times 10^n + 9 \times 10^{n-1} + \cdots + 9 \times 10 + 3$

3. On sait que $u_2 = 331$; pour montrer que c'est un nombre premier, on va vérifier qu'il n'est divisible par aucun nombre premier inférieur à $\sqrt{331}$. Or, $\sqrt{331} \simeq 18,2$.

   - u_2 n'est pas divisible par 2 puisque son chiffre des unités vaut 1.
   - u_2 n'est pas divisible par 3 puisque la somme de ses chiffres est $3 + 3 + 1 = 7$ et ce n'est pas un multiple de 3.
   - u_2 n'est pas divisible par 5 puisque son chiffre des unités n'est ni 0 ni 5.
   - $331 = 7 \times 47 + 2$ avec $0 \leqslant 2 < 7$, comme le reste de la division eucidienne de 331 par 7 est 2 (et non 0) alors 331 n'est pas divisible par 7.
   - $331 = 11 \times 30 + 1$ avec $0 \leqslant 1 < 11$, comme le reste de la division eucidienne de 331 par 11 est 1 (et non 0) alors 331 n'est pas divisible par 11.
   - $331 = 13 \times 25 + 6$ avec $0 \leqslant 6 < 13$, comme le reste de la division eucidienne de 331 par 13 est 6 (et non 0) alors 331 n'est pas divisible par 13.
   - $331 = 17 \times 19 + 8$ avec $0 \leqslant 8 < 17$, comme le reste de la division eucidienne de 331 par 17 est 8 (et non 0) alors 331 n'est pas divisible par 17.

   Finalement, 331 n'est divisible par aucun nombre premier inférieur à $\sqrt{331}$, il est donc premier.

4. D'après la question 2.b), l'écriture décimale de u_n se termine par un 1 donc u_n n'est pas divisible par 2 (car son chiffre des unités n'est pas pair) ni par 5 (car son chiffre des unités n'est ni 0 ni 5). De plus, la somme des chiffres de u_n est $3n + 1$ (car il y a un 1 et n chiffres 3). Comme $0 \leqslant 1 < 3$ alors 1 est le reste de la division euclidienne de $3n + 1$ par 3, cela implique que $3n + 1$ n'est pas divisible par 3 ; et par conséquent que u_n n'est pas divisible par 3.

5. (a) On sait que $10 \equiv -1$ [11] donc $10^{n+1} \equiv (-1)^{n+1}$ [11]. Or, $(-1)^{n+1} = -1 \times (-1)^n = -(-1)^n$.
   De plus $-7 \equiv 4$ [11]. On déduit donc que $3u_n = 10^{n+1} - 7 \equiv -(-1)^n + 4$ [11], autrement dit $3u_n = 4 - (-1)^n$ [11].

   (b) Si n est pair, alors $(-1)^n = 1$ et $3u_n = 4 - 1$ [11], c'est-à-dire $3u_n \equiv 3$ [11].
   Si n est impair, alors $(-1)^n = -1$ et $3u_n = 4 - (-1)$ [11], c'est-à-dire $3u_n \equiv 5$ [11].
   On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un entier naturel n tel que u_n est divisible par

11. Comme u_n est un diviseur de $3u_n$, par transitivité, on en déduit que 11 est aussi un diviseur de $3u_n$. En particulier, le reste de la division euclidienne de $3u_n$ par 11 est nul. Or on a vu que pour n pair, $3u_n \equiv 3\ [11]$ donc le reste de la division euclidienne de $3u_n$ par 11 est 3. Quant au cas où n est impair, on a obtenu que $3u_n \equiv 5\ [11]$, le reste de la division euclidienne de $3u_n$ par 11 est alors 5. Finalement, le reste de la division euclidienne de $3u_n$ par 11 ne vaut pas 0 et on aboutit à une contradiction. Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n n'est pas divisible par 11.

6. (a) $10 \equiv -7\ [17]$ donc $10^2 \equiv (-7)^2\ [17]$. Or, $(-7)^2 = 49 = 51 - 2 = 3 \times 17 - 2$ d'où $(-7)^2 \equiv -2\ [17]$. Ainsi, $10^2 \equiv -2\ [17]$. Comme $10^4 = (10^2)^2$ alors $10^4 \equiv (-2)^2\ [17]$, c'est-à-dire $10^4 \equiv 4\ [17]$. Comme $0 \leqslant 4 < 17$ alors le reste de la division euclidienne de 10^4 par 17 est égal à 4.

   Puisque $10^8 = (10^4)^2$ alors $10^8 \equiv 4^2\ [17]$. On sait que $4^2 = 16 = 17-1$ donc $4^2 \equiv -1\ [17]$. Finalement, $10^8 \equiv -1\ [17]$. Ensuite $10^{16} = (10^8)^2$ donc $10^{16} \equiv (-1)^2\ [17]$ c'est-à-dire $10^{16} \equiv 1\ [17]$.

   (b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $3\,u_{16k+8} = 10^{16k+9} - 7$. Or, $10^{16k+9} = (10^{16})^k \times 10^8 \times 10$. On sait que $10^{16} \equiv 1\ [17]$ donc $(10^{16})^k \equiv 1^k\ [17]$. On sait également que $10^8 \equiv -1\ [17]$ d'où $10^{16k+9} \equiv 1 \times (-1) \times 10\ [17]$ soit $10^{16k+9} \equiv -10\ [17]$. On obtient donc que $3u_{16k+8} = 10^{16k+9} - 7 \equiv -10 - 7\ [17]$, ce qui s'écrit encore $3u_{16k+9} \equiv -17\ [17]$. Comme $-17 \equiv 0\ [17]$ alors $3u_{16k+9} \equiv 0\ [17]$. Cette congruence traduit le fait que $3u_{16k+9}$ est divisible par 17. Dans la décomposition en produit de facteurs commun de $3\,u_{16k+9}$, on trouve donc le facteur 17 à une certaine puissance. Cela implique que dans la décomposition en produit de facteurs premiers de u_{16k+9} le facteur 17 apparait nécessairement (on ajoute juste un 3 pour passer de la décomposition de u_{16k+9} à celle de $3u_{16k+9}$).

Exercice 2 : Si ABC est rectangle en A, alors, d'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AC^2 + AB^2$, c'es-à-dire $z^2 = x^2 + y^2$. On va raisonner modulo 5 en trouvant les différentes valeurs d'un carré modulo 5.

x modulo 5	0	1	2	3	4
x^2 modulo 5	0	1	4	$9 \equiv 4\ [5]$	$16 \equiv 1\ [5]$

En effet, $16 = 5 \times 3 + 1$ d'où $16 \equiv 1\ [5]$.

On remarque que les différentes valeurs modulo 5 d'un carré de nombre entier sont 0, 1 ou 4.

- Si $x \equiv 0\ [5]$ alors x est un multiple de 5 et dans ce cas, l'une au moins des mesures des côtés du triangle ABC est un multiple de 5.
- De même, si $y \equiv 0\ [5]$, on peut conclure que l'une au moins des mesures des côtés du triangle ABC est un multiple de 5.
- On suppose que ni x ni y ne sont congrus à 0 modulo 5. D'après le tableau réalisé plus haut, x^2 est soit congru à 1 soit congru à 4 modulo 5 ; de même pour y^2. On peut alors effectuer un tableau qui regroupe les valeurs modulo 5 de $x^2 + y^2$.

y^2 modulo 5 \ x^2 modulo 5	1	4
1	$1+1=2$	$1+4=5 \equiv 0\ [5]$
4	$4+1=5 \equiv 0\ [5]$	$4+4=8 \equiv 3\ [5]$

  Comme $z^2 = x^2 + y^2$ alors $z^2 \equiv x^2 + y^2\ [5]$. D'après le tableau on obtient que $z^2 \equiv 0\ [5]$ ou $z^2 \equiv 2\ [5]$ ou $z^2 \equiv 3[5]$. On a déjà vu que le carré d'un nombre ne pouvait qu'être congru à 0, 1 ou 4 modulo 5. Les cas où $z^2 \equiv 2\ [5]$ et $z^2 \equiv 3[5]$ ne sont donc pas possibles. Ainsi, $z^2 \equiv 0\ [5]$ est la seule éventualité. Et ce cas ne survient que si $z \equiv 0\ [5]$ d'après le tout premier tableau établi modulo 5. On obtient alors que z est un multiple de 5, ce qui implique que dans ce cas encore, l'une au moins des mesures des côtés du triangle ABC est un multiple de 5.

Finalement, dans tous les cas, on a abouti à la conclusion que l'une au moins des mesures des côtés du triangle ABC est un multiple de 5.