Lycée J.P Vernant - 2nde 7 | Année scolaire 2012-2013
Mathématiques

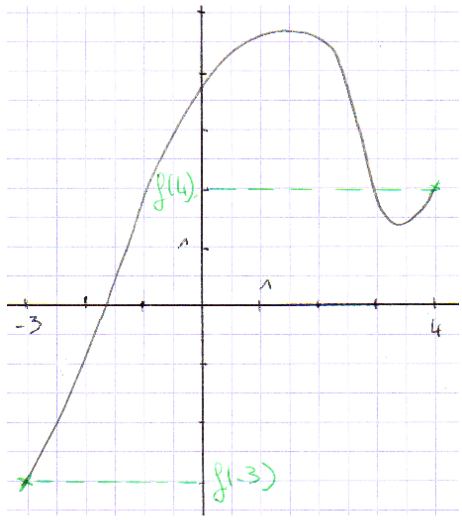
CORRECTION DU DEVOIR A LA MAISON N° 4

Exercice 1 :

1. La phrase est **vraie**. On applique la définition d'une fonction croissante sur un intervalle I : si x_1 et x_2 sont deux nombres de l'intervalle I et si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. On l'utilise avec $I = [-3\,;\,4]$, $x_1 = -3$ et $x_2 = 4$.

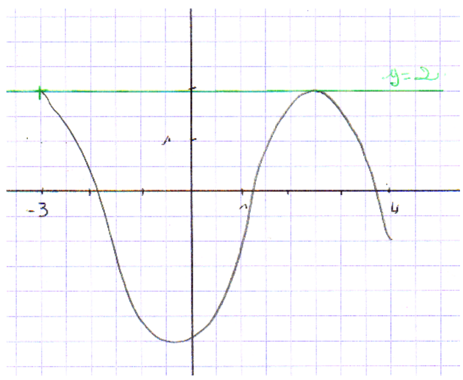
2. La phrase est **fausse**. Comme $-1 < 0$ et que -1 et 0 sont deux nombres de l'intervalle $[-3\,;\,4]$, si f était décroissante sur $[-3\,;\,4]$, il faudrait que $f(-1) \geqslant f(0)$. Or on sait que $f(0) = 2$ et $f(-1) = 0$ d'où $f(-1) < f(0)$. Cela contredit $f(-1) \leqslant f(0)$ donc f n'est pas décroissante sur $[-3\,;\,4]$.

3. La phrase est **fausse**. La fonction f peut changer de variations sur $[-3\,,\,4]$.
Représentons un contre-exemple :



4. La phrase est **vraie**. Si $x \in [-3\,;\,4]$, alors $-3 \leqslant x \leqslant 4$. Comme f est décroissante sur $[-3\,;\,4]$, alors $f(-3) \geqslant f(x)$. Or, $f(-3) = 0$ donc $f(x) \leqslant 0$. On a ainsi justifié que pour tout réel x de l'intervalle $[-3\,;\,4]$, $f(x)$ est négatif.

5. La phrase est **fausse**. Il est possible que la courbe $\mathcal{C}_f$ reste en-dessous de la droite d'équation $y = 2$ sur $[-3\,;\,4]$ sans qu'elle soit nécéssairement décroissante sur $[-3\,;\,4]$.
Représentons un contre-exemple :



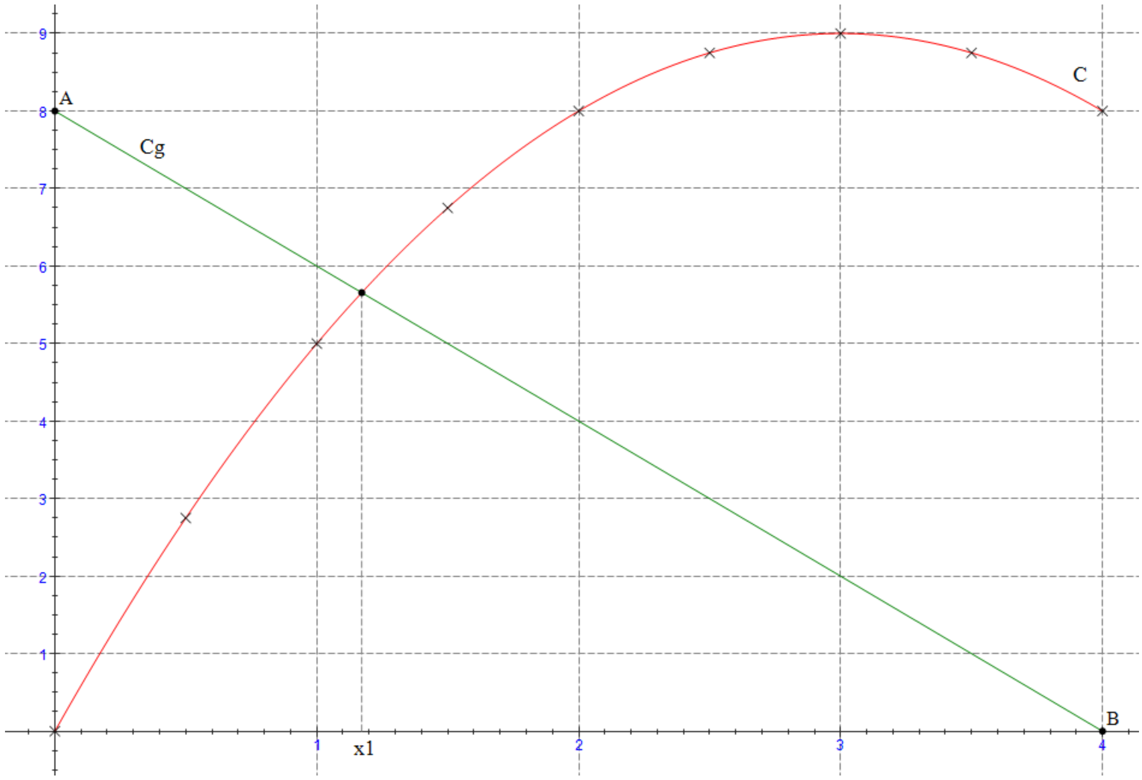
Exercice 2 :

Partie A

1. Tableau de valeurs :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$	0	2,75	5	6,75	8	8,75	9	8,75	8

Courbe de f :



2. (a) Pour tout $x \in [0\,;\,4]$, $9-(x-3)^2 = 9-(x^2-6x+9) = 9-x^2+6x-9 = -x^2+6x = f(x)$.

   (b) Un carré est toujours positif donc $(x-3)^2 \geqslant 0$ pour tout $x \in [0\,;\,4]$.
   On multiplie par $(-1)<0$, $-(x-3)^2 \leqslant 0$ puis on ajoute 9 : $9-(x-3)^2 \leqslant 9$ soit $f(x) \leqslant 9$ pour tout $x \in [0\,;\,4]$.

   Pour savoir si 9 est le maximum de f, on cherche les éventuels antécédents de 9 par f en résolvant $f(x)=9$. Or, $f(x)=9 \Leftrightarrow 9-(x-3)^2=9 \Leftrightarrow (x-3)^2=0 \Leftrightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3$. Cela implique que 9 est le maximum de f et il est atteint en $x=3$.

3. Tableau de variations de f :

x	0		3		4
			9		
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				8

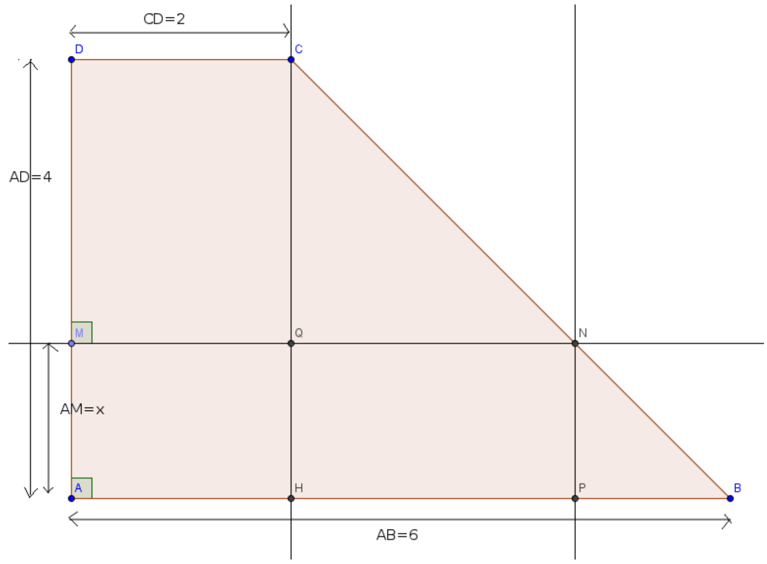
4. (a) $g(x)=2(4-x)=8-2x$ donc $g(x)$ est du type $ax+b$ avec $a=-2$ et $b=8$. Cela signifie que g est affine.

   (b) Comme g est affine, la courbe $\mathcal{C}_g$ est une droite (ou plutôt ici un segment car l'intervalle est restreint à $[0\,;\,4]$). Comme $g(0)=8$ alors $A\,(0\,;\,8) \in \mathcal{C}_g$. De plus, $g(4)=8-8=0$ donc $B\,(4\,;\,0) \in \mathcal{C}_g$.
   voir la courbe de f plus haut pour le tracé de $\mathcal{C}_g$.

   (c) Les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\{x_1\}$ avec $x_1 \simeq 1,2$

Partie B

1. Figure :



2. Comme $ABCD$ est un trapèze rectangle en A, alors (AD) est perpendiculaire à (AB). De plus, par définition de H, (CH) est parallèle à (AD). Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre donc (CH) est perpendiculaire à (AB). Or, $H \in (AB)$, ce qui signifie que (CH) est perpendiculaire à (BH), autrement dit, le triangle BCH est rectangle en H.
De plus, $BH = AB - AH = 6 - AH$. On sait que (AB) est parallèle à (DC) (par définition d'un trapèze) donc (AH) est parallèle à (DC). De plus, (CH) est parallèle à (AD) donc le quadrilatère $ADCH$ possède deux paires de côtés opposés parallèles, c'est un parallélogramme. En particulier, il a des côtés opposé de même longueur d'où $AH = DC = 2$. Ainsi, $BH = 6 - 2 = 4$. De même, $CH = AD = 4$. Ainsi, $CH = BH = 4$ donc BCH est isocèle en H.
Finalement, BCH est isocèle rectangle en H.

   Par construction du point N, (PN) est parallèle à (AD). Cela implique que (PN) est perpendiculaire à (AB). Or, $P \in (AB)$ donc (PN) est perpendiculaire à (PB). Le triangle BPN est rectangle en P.

   Méthode avec les angles pour montrer que BPN ***est isocèle***
   Comme BCH est isocèle rectangle en H, alors les angles $\widehat{HBC}$ et $\widehat{BCH}$ sont égaux. On sait aussi que $\widehat{BHC} = 90°$ et que la somme des angles d'un triangle vaut $180°$ donc $\widehat{HBC} + \widehat{BCH} + \widehat{BHC} = 180$ soit $2\widehat{HBC} + 90 = 180$, c'est-à-dire $2\widehat{HBC} = 90$ et donc $\widehat{HBC} = 45°$. Or $\widehat{HBC} = \widehat{PBN}$ donc $\widehat{PBN} = 45°$ et $\widehat{BNP} = 180 - \widehat{PBN} - \widehat{BPN} = 180 - 45 - 90 = 45°$. Le triangle BPN a ses deux angles non droits égaux à $45°$, il est donc isocèle en P.

   Méthode avec le théorème de Thalès pour montrer que BPN ***est isocèle***
   On sait que les droites (NP) est (CH) sont toutes les deux parallèles à (AD) donc elles sont parallèles entres elles.
   De plus, les droites (CN) et (HP) sont sécantes en B. D'après le théorème de Thalès, on en déduit que $\dfrac{BP}{BH} = \dfrac{NP}{CH}$. Or, on sait que BCH est isocèle en H d'où $BH = CH$, donc $\dfrac{BP}{BH} = \dfrac{NP}{BH}$ puis, en multipliant par BH, on obtient : $BP = NP$. Cela signifie que BPN est isocèle en P.

   Finalement, BPN est un triangle isocèle rectangle en P.

   On sait que (MN) est perpendiculaire à (AD), que (AD) est perpendiculaire à $(AB) = (AP)$ et que $(AP) = (BP)$ est perpendiculaire à (NP) (car BPN est isocèle en P). Ainsi, le quadrilatère $APNM$ a trois angles droits. C'est nécessairement un rectangle. En particulier, $PN = AM = x$. Comme BPN est iscoèle en P, $BP = PN$ donc $BP = AM = x$.

3. L'aire du rectangle $APNM$ est $AP \times AM = (6 - BP) \times x = x(6 - x) = 6x - x^2$.

4. On remarque que l'aire du rectangle $APMN$ est égale à $f(x)$ (fonction de la partie A). On a démontré que le maximum de f est 9, atteint en 3, donc l'aire est maximale lorsque $x = 3$.

5. (a) L'aire du rectangle $DCQM$ est $DC \times DM = 2(DA - AM) = 2(4 - x)$. On retrouve la fonction $g(x)$ de la partie A.

   (b) L'aire du rectangle $DCQM$ est égale à celle du rectangle $APNM$ lorsque $f(x) = g(x)$. Cette équation a été résolue graphiquement à la partie A, on peut alors conclure que les deux rectangles ont la même aire lorsque $x \simeq 1,2$.

Exercice 3 :

1. On calcule $(x-3)^2-12$ pour retrouver la formule de $f(x)$: $(x-3)^2-12 = x^2-6x+9-12 = x^2-6x-3 = f(x)$.
   $f(x) = (x-3)^2 - 12 = (x-3)^2 - \left(\sqrt{12}\right)^2 = (x - 3 - \sqrt{12})(x - 3 + \sqrt{12}) = (x - 3 - 2\sqrt{3})(x - 3 + 2\sqrt{3})$.

2. (a) $f(x) = -12 \;\Leftrightarrow\; (x-3)^2 - 12 = -12 \;\Leftrightarrow\; (x-3)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x - 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 3$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{12\}$.

   (b) $f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; (x-3-2\sqrt{3})(x-3+2\sqrt{3}) = 0$. Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul donc $f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x-3-2\sqrt{3} = 0$ ou $x-3+2\sqrt{3} = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 3+2\sqrt{3}$ ou $x = 3-2\sqrt{3}$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{3 + 2\sqrt{3}\,;\, 3 - 2\sqrt{3}\}$.

   (c) $f(x) = -6x \;\Leftrightarrow\; x^2 - 6x - 3 = -6x \;\Leftrightarrow\; x^2 - 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 3 \;\leftrightarrow\; x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{\sqrt{3}\,;\, -\sqrt{3}\}$.

Exercice 4 :

1. Comme le maximum de g est -1 et que le minimum de g est -2 alors $-2 \leqslant a = g(2) \leqslant -1$. De plus, la fonction g est décroissante sur $[4\,;\,5]$ donc $g(4) \geqslant g(5)$ soit $-2 \geqslant b$. Or, le minimum de g est -2 donc $b = g(5) \geqslant -2$. Finalement, $b = -2$, ce qui signifie que la fonction g est constante sur $[4\,;\,5]$.

2. Comme le minimum de g est -2, $g(x) \geqslant -2$ pour tout $x \in [-3\,;\,5]$. En particulier $g(-1) \geqslant -2$, ce qui contredit l'affirmation d'Elisa puisque $-2,1 < -2$.

3. Comme g est constante égale à -2 sur $[4\,;\,5]$, alors -2 n'admet pas seulement 2 antécédents par g. En particulier tous les nombres de l'intervalle $[4\,;\,5]$ sont des antécédents de -2 par g. Ainsi, le nombre -2 admet une infinité d'antécédents par g. Manon a tort.

4. On sait que $-3 \leqslant -2 \leqslant 0$ et g est décroissante sur $[-3\,;\,0]$ donc $g(-3) \geqslant g(-2) \geqslant g(0)$. Or, $g(-2) = -1$ et $g(0) = -2$ d'où $-2 \leqslant g(-2) \leqslant -1$.
   $g(2) = a$ et on sait que $-2 \leqslant a \leqslant -1$ donc $-2 \leqslant g(2) \leqslant -1$.

5. (a) On sait que -2 est le minimum de g sur $[-3\,;\,5]$ donc $g(x) \geqslant -2$ pour tout $x \in [-3\;\,5]$. Cela signifie que l'inéquation $g(x) < -2$ n'admet aucune solution. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \emptyset$.

   (b) On sait que le maximum de g est -1 donc pour tout $x \in [-3\,;\,5]$, $g(x) \leqslant -1$. Cela implique que l'inéquation $g(x) \geqslant 0$ n'admet pas de solution. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \emptyset$.

6. – Si $k < -2$, l'équation $g(x) = k$ n'admet pas de solution car -2 est le minimum de g. De même, si $k > -1$, alors $g(x) = k$ n'admet pas de solution car -1 est le maximum de g.
   – Si $k = -2$, on a déjà justifié que l'équation $g(x) = k$ admet une infinité de solution.
   – Si $-2 < k < a$, alors l'équation $g(x) = k$ admet trois solutions, une dans l'intervalle $[-3\,;\,0]$, l'autre dans l'intervalle $[0\,;\,2]$ et enfin la dernière dans l'intervalle $[2\,;\,4[$. En effet, la courbe $\mathcal{C}_g$ a trois points d'ordonnée k.
   – Si $k = a$, l'équation admet deux solutions, l'une égale à 2 et l'autre dans l'intervalle $[-3\,;\,0]$.
   – Si $a < k \leqslant -1$, l'équation $g(x) = k$ admet une seule solution sur $[-3\,;\,0]$.