CORRECTION DU DEVOIR A LA MAISON N° 3

Exercice 1 :

1. On suppose que $(x\,;\,y)$ est solution de l'équation (F). Alors $11x^2 - 7y^2 = 5$. Comme $5 \equiv 0\ [5]$ alors $11x^2 - 7y^2 \equiv 0\ [5]$. Or, $10 \equiv 0\ [5]$ et $-x^2 \in \mathbb{Z}$ d'où $-10x^2 \equiv 0\ [5]$. De plus, $5 \equiv 0\ [5]$ et $y^2 \in \mathbb{N}$ donc $5y^2 \equiv 0\ [5]$. Par addition des congruences, on en déduit que $11x^2 - 7y^2 - 10x^2 + 5y^2 \equiv 0\ [5]$, c'est-à-dire $x^2 - 2y^2 \equiv 0\ [5]$, ce qui revient à écrire $x^2 \equiv 2y^2\ [5]$.

2. Pour les trois premières colonnes du tableau concernant x^2, on se contente d'élever au carré.
Pour $x \equiv 3\ [5]$, on obtient $x^2 \equiv 9\ [5]$. Or, $9 \equiv 4\ [5]$ puisque 5 divise $9 - 4 = 5$ donc $x^2 \equiv 4\ [5]$.
Pour $x \equiv 4\ [5]$, on obtient $x^2 \equiv 16\ [5]$ en élevant au carré. Or, $16 \equiv 1\ [5]$ puisque $16 - 1 = 15$ est un mutliple de 5.

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à	0	1	4	4	1

— Pour $y \equiv 0\ [5]$, $y^2 \equiv 0\ [5]$, alors $2y^2 \equiv 0\ [5]$.
— Pour $y \equiv 1\ [5]$, $y^2 \equiv 1\ [5]$, alors $2y^2 \equiv 2\ [5]$.
— Pour $y \equiv 2\ [5]$, $y^2 \equiv 4\ [5]$, alors $2y^2 \equiv 8\ [5]$. Or, $8 \equiv 3\ [5]$ puisque 5 divise $8 - 3 = 5$ donc $2y^2 \equiv 3\ [5]$.
— Pour $y \equiv 3\ [5]$, $y^2 \equiv 4\ [5]$ d'après le tableau précédent donc $2y^2 \equiv 8\ [5]$. Comme $8 \equiv 3\ [5]$ alors $2y^2 \equiv 3\ [5]$.
— Pour $y \equiv 4\ [5]$, $y^2 \equiv 1\ [5]$ d'après le tableau précédent donc $2y^2 \equiv 2\ [5]$.

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à	0	2	3	3	2

3. Les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 par 5 sont 0 ; 1 et 4.
Les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de $2y^2$ par 5 sont 0 ; 2 et 3.

4. On a montré que si $(x\,;\,y)$ est un couple solution de (F) alors $x^2 \equiv 2y^2\ [5]$, autrement dit x^2 et $2y^2$ ont le même reste dans la division euclidienne par 5. Le seul reste en commun est 0 d'après la question 3. Et ce reste vaut 0 seulement si $x \equiv 0\ [5]$ et $y \equiv 0\ [5]$ d'après les tableaux de la question 2. Autrement dit, c'est le cas pour x et y tous les deux multiples de 5.

5. On suppose que x et y sont des multiples de 5. Ainsi, il existe k et k' entiers relatifs tels que $x = 5k$ et $y = 5k'$. Alors $11x^2 - 7y^2 = 11 \times 25k^2 - 7 \times 25k'^2 = 25(11k^2 - 7k'^2)$. Supposons par l'absurde que $11x^2 - 7y^2 = 5$ alors $25(11k^2 - 7k'^2) = 5$. Comme $11k^2 - 7k'^2$ est un nombre entier, alors l'égalité précédente implique que 25 est un diviseur de 5, ce qui est faux. Cela signifie que $11x^2 - 7y^2$ ne peut pas valoir 5 ; autrement dit $(x\,;\,y)$ n'est pas une solution de (F).

   Finalement, (F) n' a pas de solution : en effet, pour etre solution les nombres du couple doivent être multiples de 5 mais aucun couple de nombres multiples de 5 n'est solution.

Exercice 2 :

1. (a) On commence par faire un tableau pour se donner une idée du résultat.
Pour $n = 0$, $7^n = 1 = 0 \times 9 + 1$ avec $0 \leqslant 1 < 9$; pour $n = 1$, $7^n = 7 = 9 \times 0 + 7$ avec $0 \leqslant 7 < 9$; pour $n = 2$, $7^2 = 49 = 9 \times 5 + 4$ avec $0 \leqslant 4 < 9$; pour $n = 3$, $7^3 = 343 = 9 \times 38 + 1$ avec $0 \leqslant 1 < 9$; pour $n = 4$, $7^4 = 2401 = 9 \times 266 + 7$ avec $0 \leqslant 7 < 9$; pour $n = 5$, $7^5 = 16807 = 9 \times 1867 + 4$ avec $0 \leqslant 4 < 9$; pour $n = 6$, $7^6 = 117649 = 9 \times 13072 + 1$ avec $0 \leqslant 1 < 9$.

n	0	1	2	3	4	5	6	...
reste de 7^n dans la division euclidienne par 9	1	7	4	1	7	4	1	...

D'après le tableau, on peut conjecturer que si $n \equiv 0$ [3], alors le reste de 7^n dans la division euclidienne par 9 vaut 1 ; si $n \equiv 1$ [3], alors le reste de 7^n dans la division euclidienne par 9 vaut 7 ; si $n \equiv 2$ [3], alors le reste de 7^n dans la division euclidienne par 9 vaut 4.

(b) On a justifié que le reste de 7^3 dans la division euclidienne par 9 est 1 d'où $7^3 \equiv 1$ [3]. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(7^3)^k \equiv 1^k$ [3], c'est-à-dire $7^{3k} \equiv 1$ [3].

(c) Le reste r de la division euclidienne de n par 3 vaut 0 ; 1 ou 2.

- Supposons que $r = 0$, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k$. On peut donc écrire $7^n = 7^{3k}$ d'où $7^n \equiv 1$ [9] d'après ce qui a été prouvé à la question précédente. Comme $0 \leqslant 1 < 9$, alors le reste de la division euclidienne de 7^n par 9 est 1.
- Supposons que le reste de la division euclidienne de n par 3 vaut 1. Alors existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k + 1$. Ainsi, $7^n = 7^{3k+1} = 7^{3k} \times 7$. Or, $7^{3k} \equiv 1$ [9] donc $7^{3k} \times 7 \equiv 7 \times 1$ [9] soit $7^n \equiv 7$ [9]. Comme $0 \leqslant 7 < 9$, cela implique que le reste de 7^n dans la division euclidienne par 9 vaut 7.
- Supposons que le reste de la division euclidienne de n par 3 vaut 2. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k + 2$. On a donc $7^n = 7^{3k} \times 7^2$. Or, on sait que $7^{3k} \equiv 1$ [9] et $7^2 \equiv 4$[9] (voir tableau de la première question) donc $7^{3k} \times 7^2 \equiv 4 \times 1$ [9], c'est-à-dire $7^n \equiv 4$ [9]. Comme $0 \leqslant 4 < 9$, cela implique que le reste de 7^n dans la division euclidienne par 9 vaut 4.

(d) On effectue la division euclidienne de 2014 par 9 : $2014 = 9 \times 223 + 7$ donc $2014 \equiv 7$ [9]. Par conséquent, $(2014)^{2014} \equiv 7^{2014}$ [9]. Pour connaître le résultat de la division euclidienne de 7^{2014} par 9, on doit, d'après la question précédente, effectuer la division euclidienne de 2014 par 3 : $2014 = 3 \times 671 + 1$ avec $0 \leqslant 1 < 9$ donc le reste de la division euclidienne de 2014 par 3 vaut 1. Par conséquent, $7^{2014} \equiv 7$ [9] d'après 1.c) et donc $(2014)^{2014} \equiv 7$ [9]

2. (a) Comme $10 = 9 + 1$ alors $10 \equiv 1$ [9] et donc, pour tout entier naturel n, $10^n \equiv 1^n$ [9], c'est-à-dire $10^n \equiv 1$ [9].

(b) Si on écrit N, en base 10, alors $N = \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_0}^{10}$ où a_0 est le chiffre des unités, a_1, le chiffre des dizaines, etc .... On connaît alors la relation :

$$N = a_k \times 10^k + a_{k-1} \times 10^{k-1} + \cdots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0$$

Comme $10^k \equiv 1$ [9], $10^{k-1} \equiv 1$ [9] $\cdots$, $10^2 \equiv 1$ [9] et $10 \equiv 1$ [9] alors, par produit et somme des relations de congruences, $N \equiv a_k \times 1 + a_{k-1} \times 1 + \cdots + a_2 \times 1 + a_1 \times 1 + a_0$ [9], c'est-à-dire : $N \equiv a_k + a_{k-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0$ [9], soit $N \equiv S$ [9] où S désigne la somme des chiffres de N.

(c) N est divisible par 9 $\Leftrightarrow$ $N \equiv 0$ [9]. Comme $N \equiv S$ [9], on a l'équivalence : $N \equiv 0$ [9] $\Leftrightarrow$ $S \equiv 0$ [9]. Ainsi, N est divisible par 9 $\Leftrightarrow$ $S \equiv 0$ [9] $\Leftrightarrow$ S est divisible par 9.

3. (a) Il suffit d'utiliser le résultat obtenu à la question 2.b) plusieurs fois de suite : pour $N = A$, alors $S = B$ et on obtient $A \equiv B$ [9]. Puis, pour $N = B$ et $S = C$, cela donne : $B \equiv C$ [9] et enfin avec $N = C$ et $S = D$, on obtient : $C \equiv D$ [9]. Par transitivité de la relation de congruence, on peut conclure que $A \equiv D$ [9].

(b) Comme $2014 < 10000$ alors $(2014)^{2014} < (10000)^{2014}$ (par multiplication membre à membre) d'où $A < (10^4)^{2014}$ soit $A < 10^{4\times2014}$ ou encore $A < 10^{8056}$. Par conséquent, A ne possède pas plus de 8056 chiffres. Comme A possède au plus 8056 chiffres et que ces chiffres valent au plus 9, alors la somme des chiffres de A, notée B, est inférieure ou égale à $9 \times 8056 = 72504$.

(c) Comme $B \leqslant 72504$, c'est un nombre comportant au maximum 5 chiffres. Chacun de ses chiffres vaut au maximum 9 donc la somme de ces chiffres, appelée C ne peut pas dépasser $9 \times 5 = 45$.

(d) Lorsqu'on écrit un nombre entier inférieur à 45, le chiffre des dizaines le plus grand possible est 4. Si ce chiffre vaut 4, le plus grand chiffre possible des unités est 5 et donc la plus grande valeur de D envisageable sera $4+5=9$. Si le chiffre des dizaines n'est pas 4, on peut prendre 9 comme plus grand chiffre des unités et pour rendre D maximal, il suffit de choisir 3 comme chiffre des dizaines donc la plus grande valeur de D possible sera $3+9=12$. Le nombre 12 est donc un majorant de D plus petit que 15.

(e) D'après la question 1.a), $A \equiv 7\ [9]$ et d'après la question 3.a), $A \equiv D\ [9]$ d'où $D \equiv 7\ [9]$, cela signifie qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $D = 7 + 9k$. On sait aussi, d'après la question précédente que $0 \leqslant D \leqslant 12$ donc $0 \leqslant 7 + 9k \leqslant 12$ soit $-7 \leqslant 9k \leqslant 5$. Comme k est un nombre entier, la seule valeur qui convient est $k = 0$ d'où $D = 7$.