CORRECTION DU DEVOIR A LA MAISON N° 3

Exercice 1 :

Partie A (voir annexe pour les justifications sur le graphique)

1. La fonction $f : x \mapsto -x^2 - x + 6$ est définie sur $\mathbb{R}$.
   Pour la fonction g, on cherche les éventuelles valeurs interdites en résolvant $x - 1 = 0$. On obtient $x = 1$ donc le domaine de définition de g est $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. La courbe qui est en trait plein ne peut pas représenter la fonction g, car on peut lire graphiquement que l'image de 1 par la fonction représentée par cette courbe en trait plein est égale à 4 (en effet, le point de coordonnées $(1\,;\,4)$ appartient à la courbe en trait plein). Comme $1 \notin D_g$, la courbe de la fonction g ne possède pas de point d'abscisse 1. Finalement, la courbe en trait plein est celle de la fonction f et celle en pointillés (qui présente une coupure en l'abscisse 1) est la courbe de la fonction g.

3. D'après le graphique, $f(1) = 4$ et $g(-1) = 3$.

4.
   - Les solutions de l'équation $f(x) = 6$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ qui ont pour ordonnée 6. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-1\,;\,0\}$.
   - Les solutions de l'inéquation $g(x) < 6$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_g$ qui ont une ordonnée strictement inférieure à 6. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =]-\infty\,;\,0[\cup]1\,;\,+\infty[$.

5. Tableau de signes de la fonction f :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

6. Les solutions de $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{x_1\,;\,0\,;\,x_2\}$ avec $x_1 \simeq -2,6$ et $x_2 \simeq 2,6$.

7. Pour résoudre graphiquement $f(x) = x + 3$, on représente la fonction $h : x \mapsto x + 3$. C'est une fonction affine donc la courbe $\mathcal{C}_h$ est une droite. Il suffit de deux valeurs d'images pour tracer la courbe de h :

x	0	4
$h(x)$	3	7

   Les solutions de $f(x) = x + 3$ sont alors les abscisses des points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_h$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-3\,;\,1\}$.

Partie B

1. $f(1) = -1 - 1 + 6 = 4$ et $f(-2) = -(-2)^2 - (-2) + 6 = -4 + 2 + 6 = 4$.
   $g(-1) = \dfrac{-6}{-1-1} = \dfrac{-6}{-2} = 3$; $g\left(-\dfrac{7}{2}\right) = \dfrac{-6}{-\frac{7}{2} - 1} = \dfrac{-6}{-\frac{9}{2}} = 6 \times \dfrac{2}{9} = \dfrac{3 \times 2 \times 2}{3 \times 3} = \dfrac{4}{3}$; l'image de 1 par g n'existe pas puisqu'on a déjà justifié que 1 est une valeur interdite pour la fonction g.

2.
   - Pour déterminer les antécédents de 6 par f, on résout $f(x) = 6$.
   $$f(x) = 6 \Leftrightarrow -x^2 - x + 6 = 6 \Leftrightarrow -x^2 - x = 0 \Leftrightarrow -x(x+1) = 0$$
   Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, on obtient donc $-x = 0$ ou $x + 1 = 0$, c'est-à-dire $x = 0$ ou $x = -1$. Cela signifie que le nombre 6 admet deux antécédents par f, qui sont 0 et -1.
   - Déterminer les antécédents de 0 par g revient à résoudre $g(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-6}{x+1} = 0$, et ceci pour $x \neq 1$. Un quotient est nul lorsque son numérateur est nul, l'équation équivaut donc à $-6 = 0$. Cette égalité étant fausse, l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution donc 0 n'admet pas d'antécédent par g.

3. (a) On développe $(x+3)(2-x)$: $(x+3)(2-x) = 2x - x^2 + 6 - 3x = -x^2 - x + 6 = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   (b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+3)(2-x) = 0$ d'après la question précédente. Or, un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul donc :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x+3 = 0 \text{ ou } 2-x = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ ou } -x = -2 \Leftrightarrow x = -3 \text{ ou } x = 2$$

   L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-3\,;\,2\}$.

4. • Point A

   $0 \in D_f = \mathbb{R}$ et $f(0) = 6$ donc $A \in \mathcal{C}_f$.

   $0 \in D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $g(0) = \dfrac{-6}{-1} = 6$ donc $A \in \mathcal{C}_g$.

   • Point B :

   $1 \in D_f = \mathbb{R}$ et $f(1) = 4$ (calcul déjà effectué) donc $B \in \mathcal{C}_f$.
   $1 \notin D_g$ donc $B \notin \mathcal{C}_g$

   • Point C :

   $-\dfrac{7}{2} \in D_f = \mathbb{R}$ et $f\left(-\dfrac{7}{2}\right) = -\left(-\dfrac{7}{2}\right)^2 - \left(-\dfrac{7}{2}\right) + 6 = -\dfrac{49}{4} + \dfrac{7}{2} + 6 = \dfrac{-49+14+24}{4} = -\dfrac{11}{4} = -2,75$.

   Comme $f\left(-\dfrac{7}{2}\right) \neq 1,6$ alors $C \notin \mathcal{C}_f$.

   $-\dfrac{7}{2} \in D_g = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ et $g\left(-\dfrac{7}{2}\right) = \dfrac{4}{3}$ (montré avant). Or, $\dfrac{4}{3} \simeq 1,333$ d'où $g\left(-\dfrac{7}{2}\right) \neq 1,6$. Par conséquent $C \notin \mathcal{C}_g$.

5.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) \quad &\Leftrightarrow \quad -x^2 - x + 6 = \frac{-6}{x-1} \Leftrightarrow -x^2 - x + 6 + \frac{6}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{(-x^2-x+6)(x-1)+6}{x-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{-x^3 + x^2 - x^2 + x + 6x - 6 + 6}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^3+7x}{x-1} = 0 \end{aligned}$$

   On résout cette équation pour tout $x \neq 1$. Un quotient est nul lorsque son numérateur est nul donc on aboutit à $-x^3 + 7x = 0 \Leftrightarrow x(-x^2+7) = 0$. Or, un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. Ainsi,

$$x = 0 \text{ ou } -x^2 + 7 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } -x^2 = -7 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 = 7 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{7} \text{ ou } x = -\sqrt{7}$$

   L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{0\,;\,\sqrt{7}\,;\,-\sqrt{7}\}$.

   `Remarque` : Si on compare avec l'ensemble des solutions trouvé de manière graphique, on constate que la valeur exacte de x_1 est $-\sqrt{7}$ et celle de x_2 est $\sqrt{7}$. Comme $\sqrt{7} \simeq 2,6$, nos résultats sont cohérents.

Exercice 2 :

1. Le rectangle jaune a pour longueur $x-2$ et pour largeur $x-3$ donc

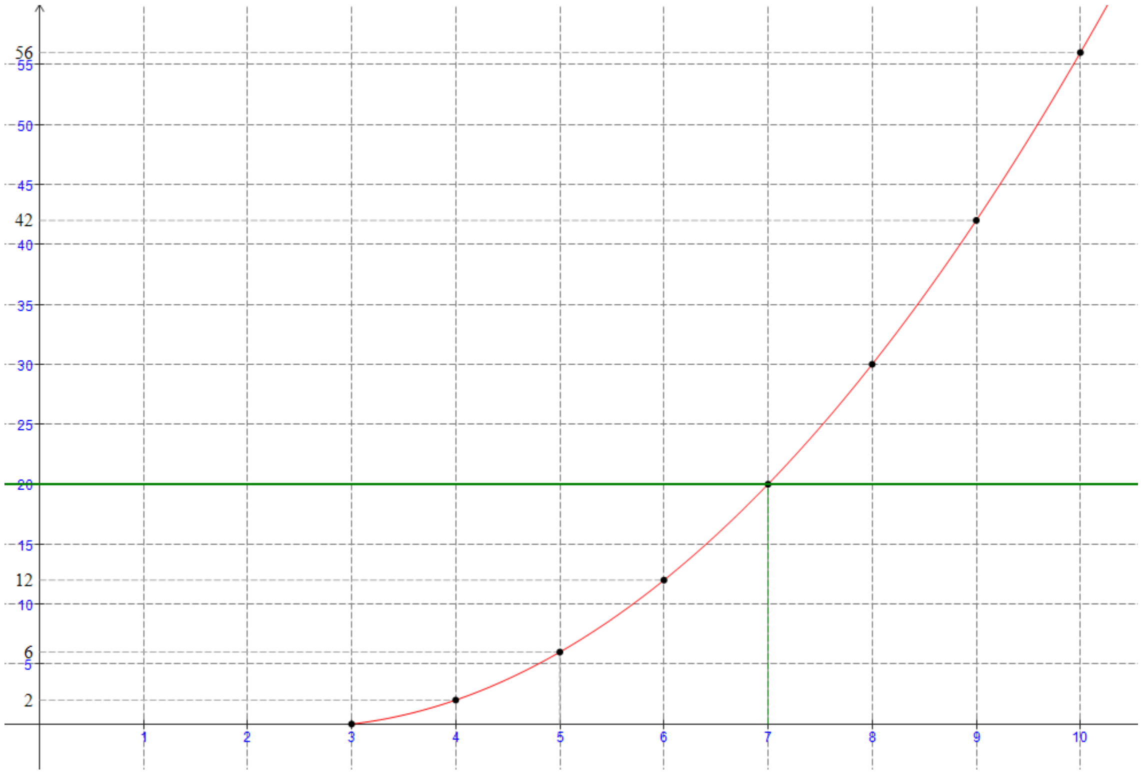
$$f(x) = (x-2)(x-3) = x^2 - 2x - 3x + 6 = x^2 - 5x + 6$$

2. (a) Tableau de valeurs :

x	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	0	2	6	12	20	30	42	56

   Comme x représente la longueur du côté du carré auquel on retire une bande de 3 cm de large alors nécessairement, $x \geqslant 3$, c'est pourquoi on ne représente la courbe de la fonction f que sur l'intervalle $[3\,;\,+\infty[$.

Courbe :



(b) Les solutions de $f(x) = 20$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ dont l'ordonnée est égale à 20. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{7\}$.

3. $f(x) - 20 = x^2 - 5x + 6 - 20 = x^2 - 5x - 14$ et $(x - 7)(x + 2) = x^2 + 2x - 7x - 14 = x^2 - 5x - 14$. Les deux expressions obtenues sont les mêmes donc $f(x) - 20 = (x - 7)(x + 2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
$f(x) = 20 \Leftrightarrow f(x) - 20 = 0 \Leftrightarrow (x - 7)(x + 2) = 0$. Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul donc $f(x) = 20 \Leftrightarrow x - 7 = 0$ ou $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 7$ ou $x = -2$. Or, ici x désigne une longueur donc ce nombre ne peut pas être négatif, on exclut donc la solutions $x = -2$ et finalement, on trouve que l'unique solution de $f(x) = 20$ est 7 (ce qui coïncide avec la résolution graphique précédente).

Exercice 3 :

1. A $t = 0$, Paul se trouve à 0 km de la ville A, il part donc de la ville A ; D'après le graphique, il s'éloigne de la ville A (car d_A augment et atteint la ville B, 20 km plus loin, au bout de 3 heures. Ensuite, il repart de la ville B pour rejoindre la ville A et met encore 3 heures pour faire le retour. Finalement, il a parcourut le trajet aller-retour, soit 40 km en 6 heures.
En ce qui concerne Martin, il part à 5 km de la ville A et atteint la ville B au bout de 6 heures. Il a donc parcouru 15 km en 6 heures et a fait une pause d'une heure entre $t = 2$ et $t = 3$. Au vu des distances parcourues en 6 heures, on peut penser que Paul se déplace en vélo et Martin à pied.

2. Paul est parti de la ville A et au bout de 6 heures, il a parcouru 40 km. Martin est parti à 5 km de la ville A (et donc 15 km de la ville B), il a parcouru 15 km au bout de 6 heures.

3. Paul dépasse Martin quand le nombre de kilomètres qui les sépare de la ville B est identique (ils se croisent à cet instant). On lit sur le graphique que cet instant intervient environ 1h35 après leur départ.

4. Pendant les 3 premières heures, Paul parcourt une distance de 20 km donc sa vitesse est $v_1 = \dfrac{20}{3} \simeq 6,67$ km/h
Pendant la quatrième heure, Paul parcourt 10 km car la distance qui le sépare de la ville A passe de 20 km à 10 km. Sa vitesse est alors $v_2 = 10$ km/h.
Pendant les deux dernières heures, Paul parcourt les 10 km restants donc sa vitesse est $v_2 = \dfrac{10}{2} = 5$ km/h.

Exercice 4 :

1. On trace la courbe représentative de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2}{x}$ à l'aide d'un tableau de valeurs (voir annexe pour la courbe) :

x	-4	-3	-2	-1	0	0,5	1	2
$g(x)$	-0,5	$\simeq -0,67$	-1	-2	non défini	4	2	1

Les solutions de (E), c'est-à-dire de $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. On obtient alors comme ensemble de solutions $\mathcal{S} = \{-2\,;\,1\,;\,2\}$.

2. (a) $(E) :\ x^2 + 2x - 1 = \dfrac{2}{x} \ \Leftrightarrow\ x^2 + 2x - 1 - \dfrac{2}{x} = 0 \ \Leftrightarrow\ \dfrac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x} = 0$

   (b) $P(x) = (x+2)(x^2-1) = x^3 - x + 2x^2 - 2 = x^3 + 2x^2 - x - 2$

   (c) D'après les deux questions précédentes, l'équation (E) équivaut à $\dfrac{P(x)}{x} = 0$. La valeur 0 est une valeur interdite donc pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{P(x)}{x} = 0 \ \Leftrightarrow\ P(x) = 0$ (en effet, un quotient est nul lorsque son numérateur est nul). Finalement, $(E) \ \Leftrightarrow\ (x+2)(x^2-1) = 0$.
   Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul donc pour tout $x \neq 0$, $P(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x + 2 = 0$ ou $x^2 - 1 = 0 \ \Leftrightarrow\ x = -2$ ou $x^2 = 1 \ \Leftrightarrow\ x = 2$ ou $x = 1$ ou $x = -1$. Finalement, l'ensemble des solutions obtenu algébriquement est $\mathcal{S} = \{-2\,;\,-1\,;\,1\}$.

3. On a obtenu graphiquement et par le calcul le même ensemble de solutions.