CORRECTION DU DEVOIR A LA MAISON N° 2

Exercice 1 :

1. On considère le polynôme $P(x) = x^2 + 18x + 77$.

   Le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac$ avec $a = 1$, $b = 18$ et $c = 77$.

   Ainsi, $\Delta = 18^2 - 4 \times 77 = 16 > 0$ et $P(x)$ admet deux racines :

   $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-18-4}{2} = -\frac{22}{2} = -11 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-18+4}{2} = -\frac{-14}{2} = -7$$

   Ainsi, $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2) = (x+11)(x+7)$. En particulier, $f(n) = (n+11)(n+7)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Comme $(n+7) \in \mathbb{N}$, alors l'égalité $f(n) = (n+11)(n+7)$ implique que $n+11$ est un diviseur de $f(n)$.

   Or, $n + 11 \neq 1$ puisque $n + 11 \geqslant 11$ et $n + 11 \neq f(n)$: en effet, si c'est le cas alors $n + 7 = \dfrac{f(n)}{n+11} = 1$, ce qui est impossible puisque $n + 7 \geqslant 7$. Le nombre $f(n)$ a donc un diviseur autre que 1 et lui même, ce qui signifie que $f(n)$ n'est pas premier.

2. Supposons que $n + 11 = -1$, c'est-à-dire $n = -1 - 11 = -12$.

   Alors $n+7 = -12+7 = -5$ et $f(-12) = (-12+1)(-12+7) = (-1)\times(-5) = 5$. Le nombre $5 = f(-12)$ est premier (on pouvait aussi choisir $n = -6$ puisque $f(-6) = (-6+11)(-6+7) = 5$).

Exercice 2 :

1. Pour $p = 2$, l'équation devient : $x^2+y^2 = 4$. Comme un carré est toujours positif, on sait que $x^2 \leqslant x^2+y^2$ donc $x^2 \leqslant 4$. Or, x est un nombre positif, donc l'inéquation $x^2 \leqslant 4$ implique, par croissance de la fonction racine carré : $x \leqslant \sqrt{4}$ soit $x \leqslant 2$. Or, x est supposé strictement positif donc les seules valeurs envisageables pour x sont : $x = 1$ et $x = 2$. Si $x = 1$, l'équation devient $y^2 = 3$ et cette équation n'a pas de solution entière. Si $x = 2$, alors $y^2 = 0$, ce qui contredit $y > 0$. Finalement, l'équation $x^2 + y^2 = 4$ n'a pas de solution dans $(\mathbb{N}^*)^2$

2. (a) On sait que p est un nombre premier différent de 2. On peut en déduire que p n'est pas divisible par 2 et donc que p est nécessairement impair. Cela signifie qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2k + 1$.
   - Supposons que x soit un nombre pair, alors il existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2\ell$. Ainsi :
     $y^2 = p^2 - x^2 = (2k+1)^2 - 4\ell^2 = 4k^2 + 4k + 1 - 4\ell^2 = 2(2k^2 + 2k - 2\ell^2) + 1$ donc y^2 est impair. Si y était pair, alors y^2 serait également pair. Comme y^2 est impair, cela implique donc que y est impair.
   - Supposons que x soit un nombre impair : il existe donc $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2\ell + 1$. On a alors $y^2 = (2k+1)^2 - (2\ell+1)^2 = 4k^2+4k+1-4\ell^2-4\ell-1 = 2(2k^2+2k-2\ell^2-2\ell)$ qui est un nombre pair. Si y était impair, alors on pourrait écrire y sous la forme $y = 2m+1$ avec $m \in \mathbb{Z}$ et donc $y^2 = 4m^2+4m+1 = 2(2m^2+2m)+1$ serait impair. Comme y^2 est pair, cela implique donc que y est aussi pair.

   On a justifié que si x est pair, alors y est impair et que si x est impair, alors y est pair. Cela signifie que x et y ont des parités différentes.

   (b) Supposons, par l'absurde, que p divise x. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = kp$. Comme x et p sont des entiers naturels non nuls, $k \geqslant 1$. Comme $x^2 + y^2 = p^2$, alors $y^2 = p^2 - x^2 = p^2 - k^2p^2 = (1-k^2)p^2$. Or, $k \geqslant 1$ donc $k^2 \geqslant 1^2$ et $1 - k^2 \leqslant 0$. Comme $p^2 \geqslant 0$, alors $(1-k^2)p^2 \leqslant 0$ et donc $y^2 \leqslant 0$, ce qui équivaut à $y^2 = 0$ et ce qui contredit l'hypothèse y non nul. La supposition "p divise x" est donc à rejeter. De même, par symétrie des rôles joués par x et y, on montrerait que p ne divise pas y. On a donc finalement démontré que x et y ne sont pas divisibles par p.

(c) Soit d un diviseur commun à x et à y. Comme $d \mid x$ et $x \mid x^2$, alors $d \mid x^2$. De même $d \mid y^2$. D'où $d \mid x^2+y^2$. Or, $x^2+y^2=p^2$ donc $d \mid p^2$. Comme p est un nombre premier, les seuls diviseurs de p^2 sont 1, p, et p^2 (dans sa décomposition en facteur premier seul le facteur p apparaît à l'exposant 2). Ainsi, soit $d=1$, soit $d=p$, soit $d=p^2$. D'après la question précédente, le cas $d=p$ est impossible car p ne divise ni x, ni y. Supposons que $d=p^2$. On aurait alors $p^2 \mid x$ puis, comme $p \mid p^2$, on en déduirait que $p \mid x$, ce qui contredit encore une fois ce qui a été démontré à la question 2.b). Le cas $d=p^2$ n'est donc pas envisageable et donc la seule possibilité restante est $d=1$. On a ainsi prouvé le seul diviseur commun à x et à y est le nombre 1.

3. (a) Il suffit de vérifier que $|u^2-v^2|^2+(2uv)^2=p^2$.

$$|u^2-v^2|^2+(2uv)^2=(u^2-v^2)^2+4u^2v^2=u^4-2u^2v^2+v^4+4u^2v^2=u^4+2u^2v^2+v^4=(u^2+v^2)^2=p^2$$

Le couple $(|u^2-v^2|\,;\,2uv)$ est solution de l'équation (E).

(b) Pour $p=5$, on peut choisir $u=2$ et $v=1$ car $2^2+1^2=5$. On a alors $|u^2-v^2|=|4-1|=3$ et $2uv=4$ donc d'après la question précédente, $(3\,;\,4)$ est solution de (E).
Pour $p=13$, on peut écrire $p=9+4=3^2+2^2$ donc $u=3$ et $v=2$. Alors $|u^2-v^2|=|9-4|=5$ et $2uv=2\times3\times2=12$ donc $(5\,;\,12)$ est solution de (E).

4. (a) Supposons que $3=u^2+v^2$ alors $u^2 \leqslant 3$ et donc $u \leqslant 1$ puisque u est un entier naturel. Soit $u=1$ et alors $v^2=2$ mais cette équation n'a pas de solution entière ; soit $u=0$ et alors $v^2=3$ et on conclut de même. On ne peut donc pas écrire 3 comme une somme de deux carrés.
Supposons que $7=u^2+v^2$ avec u et v entiers naturels. Alors $u^2 \leqslant 7$ et donc $u \leqslant 2$. Si $u=2$, alors $v^2=7-4=3$ et ceci est impossible. Si $u=1$, alors $v^2=7-1=6$ et 6 n'est pas le carré d'un nombre entier, donc c'est encore impossible. Si $u=0$ alors $v^2=7$ et cette équation n'a pas non plus de solution entière. Par conséquent, 7 ne peut pas s'écrire comme la somme de deux carrés.

(b) Supposons que $(x\,;\,y)$ est une solution de $x^2+y^2=9$. Alors $x^2 \leqslant 9$ et donc $x \leqslant 3$ car $x \geqslant 1$. Le cas où $x=3$ donne $y^2=0$, ce qui contredit $y>0$. Le cas où $x=2$ donne $y^2=9-4=5$ et cette équation n'a pas de solution entière. Le cas où $x=1$ donne $y^2=9-1=8$, on conclut de même que c'est impossible. Par conséquent, l'équation $x^2+y^2=3^2$ n'a pas de solutions dans $(\mathbb{N}^*)^2$.

Supposons que $(x\,;\,y)$ est une solution de $x^2+y^2=49$. Alors $x^2 \leqslant 49$ donc $x \leqslant 7$. Si $x=7$, $y^2=0$ est à rejeter par hypothèse. Si $x=6$, $y^2=49-36=13$ et cette équation n'a pas de solution entière. Si $x=5$, alors $y^2=49-25=24$ et 24 n'est pas le carré d'un nombre entier. Si $x=4$, alors $y^2=49-16=33$: il n'y a pas de solution y dans $\mathbb{N}$. Si $x=3$, alors $y^2=49-9=40$, ce qui est impossible pour $y \in \mathbb{N}$. Si $x=2$, alors $y^2=49-4=45$, équation sans solution entière. Enfin, si $x=1$, $y^2=49-1=48$ et cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$. En considérant tous les cas possibles pour x, on peut en déduire que l'équation $x^2+y^2=7^2$ n'a pas de solution dans $(\mathbb{N}^*)^2$.