CORRECTION DU DEVOIR A LA MAISON N° 2

Exercice 1 :

1. La fonction f est définie sur l'ensemble des nombres x tels que $x+2 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq -2$. Ainsi, $D_f = \mathbb{R} - \{-2\} =]-\infty\,;\,-2[\cup]-2\,;\,+\infty[$

2. $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2 \times \frac{1}{3} - 3}{\frac{1}{3}+2} = \dfrac{\frac{2-9}{3}}{\frac{1+6}{3}} = \dfrac{-7}{3} \times \dfrac{3}{7} = -1$

3. $f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{2x-3}{x+2} = 0$. On résout cette équation sur D_f donc pour $x \neq -2$.
   Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul donc sur D_f,
   $$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x-3=0 \;\Leftrightarrow\; 2x = 3 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{3}{2}$$

4. Pour déterminer les antécédents de -3, on résout $f(x) = -3 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{2x-3}{x+2} = -3$ pour $x \neq -2$.
   $$f(x) = -3 \;\Leftrightarrow\; \frac{2x-3}{x+2} + 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2x-3}{x+2} + \frac{3(x+2)}{x+2} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2x-3+3x+6}{x+2} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{5x+3}{x+2} = 0$$
   En appliquant la même régle sur le quotient nul qu'à la question précédente, sur D_f,
   $$f(x) = -3 \;\Leftrightarrow\; 5x+3 = 0 \;\Leftrightarrow\; 5x = -3 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{3}{5}$$
   Le nombre -3 admet un seul antécédent par f qui est égal à $-\dfrac{3}{5}$.
   Pour déterminer les antécédents de 2 par f on résout $f(x) = 2 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{2x-3}{x+2} = 2$ pour $x \neq -2$.
   $$\begin{aligned} f(x) = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2x-3}{x+2} - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2x-3}{x+2} - \frac{2(x+2)}{x+2} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2x-3-(2x+4)}{x+2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{2x-3-2x-4}{x+2} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{-7}{x+2} = 0 \end{aligned}$$
   Comme le numérateur -7 ne s'annule pas, $f(x) = 2$ n'admet pas de solution donc 2 n'admet pas d'antécédent par f.

5. - $-\dfrac{3}{5} \neq -2$ donc $-\dfrac{3}{5} \in D_f$. De plus, $\left(-\dfrac{3}{5}\right) = -3$ car on a déjà montré que $-\dfrac{3}{5}$ est l'antécédent de -3 par f (à la question 4). On en déduit que $A\left(-\dfrac{3}{5}\,;\,-3\right) \in \mathcal{C}_f$
   - Comme $-2 \notin D_f$ alors $B\,(-2\,;\,0) \notin C_f$.
   - Comme $(-0,7) \neq -2$ alors $-2 \in D_f$. De plus $f(-0,7) = \dfrac{2 \times (-0,7) - 3}{-0,7+2} = \dfrac{-4,4}{1,3} = -\dfrac{44}{13}$. Or, $-3,38 = -\dfrac{338}{100} = -\dfrac{169}{50} \neq -\dfrac{44}{13}$ puisque les deux fractions sont sous forme irréductible. On en déduit que $C\,(-0,7\,;\,-3,38) \notin \mathcal{C}_f$.
   - Comme $0 \neq -2$ alors $0 \in D_f$. De plus, $f(0) = \dfrac{-3}{2} = -1,5$. Ainsi, $D\,(0\,;\,-1,5) \in \mathcal{C}_f$.
   - Comme $\sqrt{3} \neq -2$, alors $\sqrt{3} \in D_f$. De plus,
     $$\begin{aligned} f(\sqrt{3}) &= \frac{2\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}+2} = \frac{(2\sqrt{3}-3)(\sqrt{3}-2)}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)} = \frac{2 \times (\sqrt{3})^2 - 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 6}{3-4} = \frac{6+6-7\sqrt{3}}{-1} \\ &= -(12 - 7\sqrt{3}) = 7\sqrt{3} - 12 \end{aligned}$$
     On en déduit que $E\left(\sqrt{3}\,;\,7\sqrt{3}-12\right) \in \mathcal{C}_f$

6. Si un point de $\mathcal{C}_f$ a pour ordonnée 1000, son abscisse x vérifie $f(x)=1000$. On résout cette équation pour $x\neq -2$:

$$f(x)=1000 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x+2}=1000 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x+2}-1000=0 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x+2}-\frac{1000(x+2)}{x+2}=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x-3-(1000x+2000)}{x+2}=0 \Leftrightarrow \frac{2x-3-1000x-2000}{x+2}=0 \Leftrightarrow \frac{-998x-2003}{x+2}=0$$

On applique la règle du quotient nul, pour tout $x\in D_f$:

$$f(x)=1000 \Leftrightarrow -998x-2003=0 \Leftrightarrow -998x=2003 \Leftrightarrow x=-\frac{2003}{998}$$

Le point d'ordonnée 1000 appartenant à $\mathcal{C}_f$ a pour abscisse $x=-\dfrac{2003}{998}$.

Exercice 2 :

1. La première mise au même dénominateur est correcte : $\dfrac{3x}{2}+\dfrac{7}{4}=\dfrac{6x}{4}+\dfrac{7}{4}=\dfrac{6x+7}{4}$.
   Par contre, la deuxième égalité est fausse, on ne peut pas simplifier par 2 puisque c'est une somme au numérateur. Si on divise par 2, il faut aussi diviser par 2 le nombre 7 : $\dfrac{3x+7}{2}=\dfrac{3x}{2}+\dfrac{7}{2}\neq\dfrac{3x}{2}+\dfrac{7}{4}$.

2. L'utilisation du théorème de Pythagore est correcte : on obtient $BC^2=144+25$ donc $BC=\sqrt{144+25}$ mais la suite du calcul est fausse car en règle générale, $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$ donc $\sqrt{144+25}\neq\sqrt{144}+\sqrt{25}$.
   Le calcul correct est $\sqrt{144+25}=\sqrt{169}=13$.

3. La première partie du calcul est juste : $\dfrac{2^5\times 5^3}{2^2\times 5^1}=2^{5-2}\times 5^{3-1}=2^3\times 5^2$ mais $2^3\times 5^2\neq 10^5$. Pour pouvoir ajouter les exposants, il faut le même nombre : $a^n\times a^p=a^{n+p}$.
   En fait $2^3\times 5^2=2\times 2^2\times 5^2=2\times(2\times 5)^2=2\times 10^2=200\neq 10^5$. Pour avoir 10^5, il aurait fallu obtenir $(2\times 5)^5=2^5\times 5^5$

4. Pour la première partie du calcul, c'est Leïla qui a raison et non Mathieu. Mais elle fait ensuite une erreur. En effet : $(3x)^3=3^3x^3=27x^3$ d'où $(3x)^3(2x\times y^2)=27x^3(2x\times y^2)$. La formule appliquée par la suite semble être $a\times(b\times c)=(a\times b)\times(a\times c)$ et cette règle est incorrecte. Le calcul correct est $27x^3(2x\times y)=27x^3\times 2x\times y=54x^{3+1}y=54x^4y$

5. On réduit au même dénominateur : $\dfrac{1}{2}-\dfrac{-3+x}{4}=\dfrac{2}{4}-\dfrac{-3+x}{4}=\dfrac{2-(-3+x)}{4}=\dfrac{2+3-x}{4}=\dfrac{5-x}{4}$.
   C'est Ophélie qui a raison.

Exercice 3 :

1. S'il vend sa récolte le 1er juin, le producteur vendra 1200 kg de pommes de terre au prix de 1 euro par kilogramme donc il touchera 1200 euros.

2. S'il attend un jour, il disposera de (1200+60) kg de pommes de terre mais le prix de vente sera de (1-0,02)=0,98 euros par kilogramme. Il touchera donc $1260\times 0,98=1234,8$ euros.
   S'il attend 5 jours, sa récolte sera de $1200+60\times 5=1500$ kg de pommes de terre et le prix de vente sera de $1-0,02\times 5=0,9$ euros pas kilogramme. Par conséquent, il touchera $1500\times 0,9=1350$ euros.
   S'il attend 10 jours, il pourra vendre $1200+10\times 60=1800$ kg de pomme de terre avec un prix par kilogramme s'élevant à $1-10\times 0,02=0,8$ euros. Il touchera alors $1800\times 0,8=1440$ euros.

3. (a) S'il attend n jours,
   - le nombre de kilogramme augmentant chaque jour de 60, il sera alors de $1200+60n$;
   - quand au prix du kilogramme, vu qu'il diminue chaque jour de 0,02 euros, il attendra $1-0,02n$ euros.

(b) La recette totale correspond alors au produit du nombre de kilogramme à vendre par le prix du kilo vendu soit

$$\begin{aligned} R(n) &= (1200+60n)(1-0,02n) = 1200 - 1200\times 0,02n + 60n - 60n\times 0,02n \\ &= 1200 - 24n + 60n - 1,2n^2 = -1,2n^2 + 36n + 1200 \end{aligned}$$

4. (a) Graphiquement, on s'aperçoit que le maximum est atteint pour $n = 15$ et vaut environ 1500 euros : en effet, on mesure approximativement 1,7 cm en ordonnée alors que 400 correspond à 0,45 cm donc la valeur maximale est environ égale à $\dfrac{1,7\times 400}{0,45} \simeq 1510$. Plus précisément, puisque le maximum à l'air atteint pour $n = 15$, on peut calculer $R(15)$: $R(15) = -1,2\times 15^2 + 36\times 15 + 1200 = 1470$. Cette valeur est en fait la valeur exacte de la recette maximale.

   (b) D'après le graphique, la recette est à nouveau de 1200 euros pour $n = 30$. Pour le déterminer par le calcul, on résout :

$$R(n) = 1200 \;\Leftrightarrow -1,2n^2 + 36n + 1200 = 1200 \;\Leftrightarrow\; -1,2n^2 + 36n = 0 \;\Leftrightarrow\; n(-1,2n+36) = 0$$

   Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul donc l'équation précédente équivaut à $n = 0$ ou $-1,2n + 36 = 0$. On résout cette dernière équation : $-1,2n = -36$ soit $n = \dfrac{-36}{-\frac{12}{10}} = \dfrac{36}{\frac{6}{5}} = 36\times\dfrac{5}{6} = 6\times 5 = 30$. On retrouve la valeur lue graphiquement. C'est donc 30 jours après le 1$^{\text{er}}$ juin, c'est-à-dire le 1$^{\text{er}}$ juillet que la recette est à nouveau égale à 1200 euros.

   (c) Le producteur n'a pas intérêt à attendre plus de 30 jours avant de vendre ses pommes de terre puisque, d'après le graphique, une fois passé ce délai la recette semble diminuer pour atteindre au bout de 50 jours une valeur nulle.

Exercice 4 : Voir annexe pour les justifications sur le graphique

1. (a) L'image de (-2) par la fonction f est $f(-2) = 2$.

   (b) Les antécédents de 1 sont -3 et 3.

   (c) On a $1+\sqrt{2} \simeq 2,4$ donc $f(1+\sqrt{2}) \simeq f(2,4)$.
   On lit graphiquement que $f(2,4) \simeq 1,5$ d'où $f(1+\sqrt{2}) \simeq 1,5$.

   (d) Les valeurs de x telles que $f(x) = 5$ sont les antécédents de 5 par f, c'est-à-dire $x = -1$ et $x = 1$.

2. Si on suppose que $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ le domaine de définition serait l'ensemble des nombres x tels que $x+1 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq -1$. Or, graphiquement, on remarque que -1 admet une image, il n'y a pas de coupure en -1. L'expression $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ ne peut donc pas convenir.

   Pour l'expression $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, si on cherche les valeurs interdites, on doit résoudre :
   $1+x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = -1$. Un carré est toujours positif donc il n'y a pas de valeur interdite. Cela correspond bien au graphique où la fonction semble être définie sur $\mathbb{R}$.

3. (a) $f(-2) = \dfrac{10}{1+(-2)^2} = \dfrac{10}{1+4} = \dfrac{10}{5} = 2$

$$\begin{aligned} f(1+\sqrt{2}) &= \frac{10}{1+(1+\sqrt{2})^2} = \frac{10}{1+1+2\sqrt{2}+2} = \frac{10}{4+2\sqrt{2}} = \frac{10}{2(2+\sqrt{2})} = \frac{5}{2+\sqrt{2}} \\ &= \frac{5(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \frac{5(2-\sqrt{2})}{4-2} = \frac{10-5\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

   (b) On cherche à résoudre l'équation $f(x) = 1$.

$$f(x) = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{10}{1+x^2} = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{10}{1+x^2} - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{10-(1+x^2)}{1+x^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{9-x^2}{1+x^2} = 0$$

Il n'y a pas de valeur interdite donc $f(x) = 1 \Leftrightarrow 9 - x^2 = 0$ (un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul). Or, $9 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$.
Le nombre 1 admet donc deux antécédents qui sont 3 et -3.

(c) Comme $D_f = \mathbb{R}$ (montré à la question 2), alors $\dfrac{3}{2} \in D_f$.
De plus, $f(\dfrac{3}{2}) = \dfrac{10}{1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \dfrac{10}{1 + \frac{9}{4}} = \dfrac{10}{\frac{4+9}{4}} = 10 \times \dfrac{4}{13} = \dfrac{40}{13}$.
On en déduit que $A\left(\dfrac{3}{2}\,;\,\dfrac{40}{13}\right) \in \mathcal{C}_f$.