CORRECTION DU DEVOIR A LA MAISON N° 1

Exercice 1 :

1. La notation $[7\,;\,-1]$ ne veut rien dire que car $7 > -1$. En fait $7 \geqslant x \geqslant -1$ équivaut à $x \in [-1\,;\,7]$.
La phrase est **FAUSSE**.

2. L'ensemble $\mathbb{N}$ est inclus dans $[0\,;\,+\infty[$ mais l'égalité est incorrecte : en effet, certains nombres de $[0\,;\,+\infty[$ ne sont pas entiers. Par exemple, $3,71 \in [0\,;\,+\infty[$ car $3,71 \geqslant 0$ mais $3,71 \notin \mathbb{N}$.
La phrase est **FAUSSE**.

3. L'ensemble $A \cap B$ contient tous les nombres appartenant à la fois à A et à B et l'ensemble $A \cup B$ contient tous les nombres appartenant à A où à B, éventuellement aux deux à la fois. Par conséquent, si un nombre est dans les deux intervalles à la fois, il est en particulier dans $A \cup B$. Cela signifie que $(A \cap B) \subset (A \cup B)$.
La phrase est **VRAIE**.

4. $10^{-8} = 0,00000001$ et ce nombre est bien strictement supérieur à 0 et strictement inférieur à 1. Par conséquent, $10^{-8} \in]0\,;\,1[$.
La phrase est **VRAIE**.

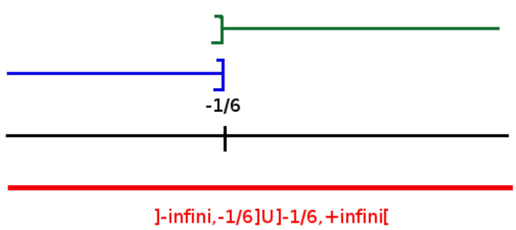
5. Comme $3 > 2$ alors 3 est bien supérieur ou égal à 2 soit $3 \geqslant 2$.
La phrase est **VRAIE**

6. $\sqrt{2} > \sqrt{1}$ et $\sqrt{1} = 1$ donc $\sqrt{2} > 1$, ce qui s'écrit aussi $\sqrt{2} \in]1\,;\,+\infty[$. Comme $\sqrt{2}$ est dans un des deux intervalles de la réunion proposée, il est dans cette réunion : $\sqrt{2} \in]-\infty\,;\,-1[\cup]1\,;\,+\infty[$.
La phrase est **VRAIE**.

7. On met les fractions $\frac{5}{9}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{7}{12}$ au même dénominateur : $\frac{5}{9} = \frac{20}{36}$, $\frac{1}{2} = \frac{18}{36}$ et $\frac{7}{12} = \frac{21}{36}$. Or, $\frac{18}{36} \leqslant \frac{20}{36} < \frac{21}{36}$, soit : $\frac{1}{2} \leqslant \frac{5}{9} < \frac{7}{12}$. Autrement dit, $\frac{5}{9} \in \left[\frac{1}{2}\,;\,\frac{7}{12}\right[$.
La phrase est **VRAIE**.

8. Si $I \subset J$ alors tous les nombres de I sont aussi dans J. Les nombres qui appartiennent à la fois à I et à J sont donc les nombres appartenant à I (en effet si un nombre n'appartient pas à I, il ne peut pas appartenir à $I \cap J$ et si un nombre appartient à I, il appartient aussi à J donc il appartient à $I \cap J$). Cela s'écrit : $I \cap J = I$.
La phrase est **VRAIE**.

9. D'après le schéma ci-dessous, $\left]-\infty\,;\,-\frac{1}{6}\right] \cup \left]-\frac{1}{6}\,;\,+\infty\right[=]-\infty\,;\,+\infty[= \mathbb{R}$.



La phrase est **VRAIE**.

10. $\frac{2}{3} = 0,66666666.....$ donc $\frac{2}{3} > 0,6666$. Par conséquent, $\frac{2}{3} \notin]0,666\,;\,0,6666[$.
La phrase est **FAUSSE**.

Exercice 2 :

1. Le domaine de définition de f est $D_f = [-4\,;\,7]$ (lu sur l'axe des abscisses)
2. L'image de 5 par f est -1.

3. $f(0)=3,5$.
4. Les antécédents de 2 par f sont -3, -1 et 3.
5. (a) Si $x\in[-1\,;\,4]$, alors $f(x)\in[0\,;\,4]$ (en effet, si les abscisses varient entre -1 et 4 alors les ordonnées varient entre 0 et 4, voir le surlignage en vert sur l'annexe)
   (b) Si $x\in[-2\,;\,1]$ alors $f(x)\in[1\,;\,4]$ et si $x\in[3\,;\,5]$ alors $f(x)\in[-1\,;\,2]$.
   Ainsi, lorsque $x\in[-2\,;\,1]\cup[3\,;\,5]$, alors $f(x)\in[1\,;\,4]\cup[-1\,;\,2]=[-1\,;\,4]$ (voir schéma sur l'annexe et le surlignage en orange)
   (c) On remarque que $[0\,;\,7]\cap[4\,;\,+\infty[=[4\,;\,7]$ (voir schéma en annexe).
   Or, si $x\in[4\,;\,7]$, alors $f(x)\in[-1\,;\,0]$ (voir surlignage en noir sur l'annexe).
6. (a) Si $f(x)\in[-1\,;\,1[$, alors $x\in]3,5\,;\,7]$ (en effet si les ordonnées varient entre -1 et 1 avec 1 exclu, alors les abscisses sont comprises entre 3,5 et 7 avec 3,5 exclu, voir le surlignage en bleu sur l'annexe)
   (b) Si $f(x)\in]1\,;\,2]$ alors $f(x)\in[-3\,;\,-2[\cup]-2\,;\,-1]\cup[3\,;\,3,5[$ (surlignage en rouge sur l'annexe)

Exercice 3 :

$$A = \frac{3}{5}\times\frac{2-\frac{4}{7}}{3}\times\frac{1}{\frac{4}{3}-\frac{1}{2}} = \frac{\cancel{3}\times(\frac{14}{7}-\frac{4}{7})}{5\times\cancel{3}\times(\frac{8}{6}-\frac{3}{6})} = \frac{\frac{10}{7}}{5\times\frac{5}{6}} = \frac{\frac{10}{7}}{\frac{25}{6}} = \frac{10}{7}\times\frac{6}{25} = \frac{5\times2\times6}{7\times5\times5} = \frac{12}{35}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{\left(10^{-5}\right)^3\times\left(9\times10^4\right)^2\times(0,006)^{-1}}{1+3^2} = \frac{10^{-15}\times9^2\times10^8\times\left(6\times10^{-3}\right)^{-1}}{10} = \frac{10^{-15+8}\times\left(3^2\right)^2\times6^{-1}\times10^3}{10} \\ &= \frac{10^{-7}\times3^4\times10^3}{6\times10} = \frac{10^{-7+3}\times3^4}{3\times2\times10} = \frac{10^{-4}\times3^3}{2\times10} = \frac{27}{2}\times10^{-4-1} = 13,5\times10^{-5} \end{aligned}$$

L'écriture scientifique de B est $B=1,35\times10^{-4}$ et l'écriture décimale est $B=0,000135$.

$$\begin{aligned} C &= \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{5}}-\left(2\sqrt{60}-\sqrt{\frac{135}{4}}\right) = \frac{10\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}-2\sqrt{4\times15}+\frac{\sqrt{135}}{\sqrt{4}} = \frac{10\sqrt{15}}{5}-4\sqrt{15}+\frac{\sqrt{5\times27}}{2} \\ &= 2\sqrt{15}-4\sqrt{15}+\frac{\sqrt{9\times15}}{2} = -2\sqrt{15}+\frac{3\sqrt{15}}{2} = \frac{-4\sqrt{15}+3\sqrt{15}}{2} = -\frac{\sqrt{15}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{5}{12}-3\times\frac{7}{8}-\frac{\sqrt{25-3^2}}{6} = \frac{5}{12}-\frac{21}{8}-\frac{\sqrt{25-9}}{6} = \frac{10}{24}-\frac{63}{24}-\frac{\sqrt{16}}{6} = -\frac{53}{24}-\frac{4}{6} = -\frac{53}{24}-\frac{2}{3} = -\frac{53}{24}-\frac{16}{24} \\ &= -\frac{69}{24} = -\frac{3\times23}{3\times8} = -\frac{23}{8} \end{aligned}$$

Exercice 4 :

1. On suppose que $T_C=20$ alors $T_F=1,8T_C+32=1,8\times20+32=36+32=68$. Pour l'américain, la température est de $68°F$.
2. On suppose que $T_F=77$ alors $77=1,8T_C+32 \iff 1,8T_C=77-32=45 \iff T_C=\dfrac{45}{1,8}=25$. Pour le français, la température est de $25°C$.
3.
   - Si $T_C=0$ alors $T_F=1,8\times0+32=32$
   - Si $T_C=100$ alors $T_F=1,8\times100+32=180+32=212$
   - Si $T_F=50$ alors $50=1,8T_C+32 \iff 1,8T_C=50-32=18 \iff T_C=\dfrac{18}{1,8}=10$
   - Si $T_C=40$ alors $T_F=1,8\times40+32=72+32=104$
   - Si $T_C=20$ alors $T_F=68$ d'après la question 1.
   - Si $T_F=10$ alors $10=1,8T_C+32 \iff 1,8T_C=10-32=-22 \iff T_C=\dfrac{-22}{1,8}=-\dfrac{220}{18}=-\dfrac{110}{9}\simeq-12,2$
   - Si $T_C=37$, alors $T_F=1,8\times37+32=98,6$.
   - Si $T_F=0$ alors $0=1,8T_C+32 \iff 1,8T_C=-32 \iff T_C=-\dfrac{32}{1,8}=-\dfrac{320}{18}=-\dfrac{160}{9}\simeq-17,8$

- Si $T_F=-5$, $-5=1,8T_C+32 \Leftrightarrow 1,8T_C=-5-32=-37 \Leftrightarrow T_C=-\dfrac{37}{1,8}=-\dfrac{370}{18}=-\dfrac{185}{9}\simeq -20,6$.

$T_C(°C)$	0	100	10	40	20	$-\dfrac{110}{9}\simeq -12,2$	37	$-\dfrac{160}{9}\simeq -17,8$	$-\dfrac{185}{9}\simeq -20,6$
$T_F(°F)$	32	212	50	104	68	10	98,6	0	-5

4. On cherche T_C et T_F tels que $T_C=T_F$.
Il s'agit donc de résoudre $T_C=1,8T_C+32$. Cette équation équivaut à :
$T_C-1,8T_C=32 \Leftrightarrow -0,8T_C=32 \Leftrightarrow T_C=-\dfrac{32}{0,8}=-\dfrac{320}{8}=-40$. La température est alors de $-40°C$ et aussi $-40°F$.