CORRECTION DU DEVOIR A LA MAISON N° 1

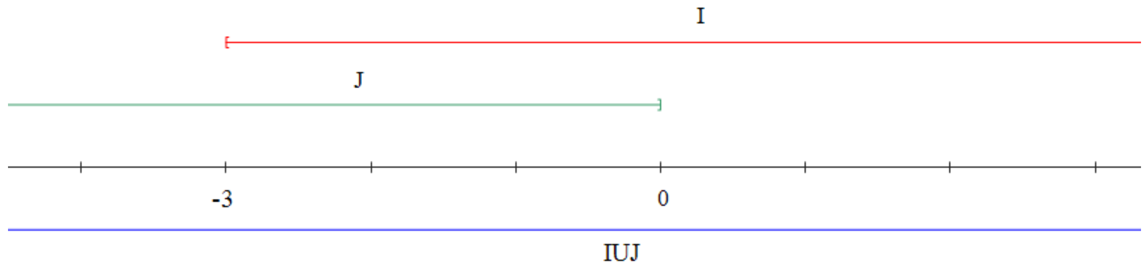
Exercice 1 :

1. $10^{-4} = 0,0001$ est un nombre positif donc $10^{-4} \notin]-\infty\,;\,0[$. L'affirmation est **fausse**.

2. $5 \geqslant x > 2$ signifie que $x \in]2\,;\,5]$ et non $x \in [5\,;\,2[$. En effet, la notation $[5\,;\,2[$ n'a pas de sens car $5 > 2$. L'affirmation est **fausse**.

3. Dans l'ensemble $\mathbb{N}$, ne se trouvent que des nombres entiers alors que l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ contient tous les nombres réels positifs donc ces deux notations ne désignent pas le même semble. En particulier, $4,5 \in [0\,;\,+\infty[$ alors que $4,5 \notin \mathbb{N}$. L'affirmation est **fausse**.

4. On note $I = [-3\,;\,+\infty[$ et $J =]-\infty\,;\,0]$.



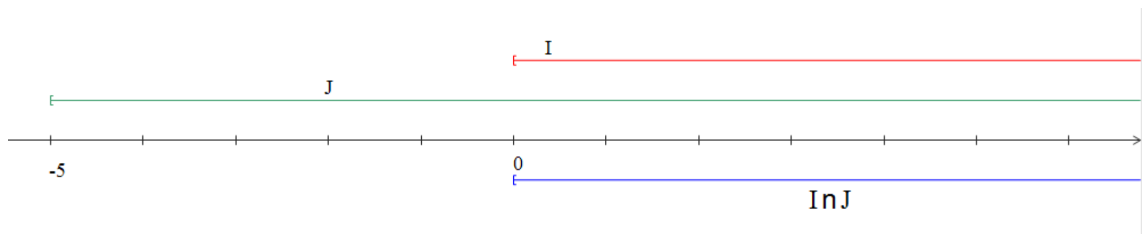
On conclut que $I \cup J =]-\infty\,;\,+\infty[= \mathbb{R}$. L'affirmation est **vraie**

5. La notation $2 < x > 5$ n'a pas de sens car les inégalités ne sont pas dans le même sens. Ainsi, on ne peut pas traduire $x \in [2\,;\,+\infty[\cap]5\,;\,+\infty[$ par $2 < x > 5$. De plus, $x \in [2\,;\,+\infty[$ correspond à $2 \leqslant x$, c'est une inégalité large et non stricte. L'affirmation est **fausse**.

6. $4 \geqslant 0$ est une inégalité correcte puisque le symbole $\geqslant$ signifie "supérieur ou égal" et en pariculier, 4 est bien supérieur à 0, donc en particulier, 4 est supérieur ou égal à 0 ; ou encore $4 \in [0\,;\,+\infty[$. L'affirmation est **vraie**.

7. Comme $7 \geqslant 5$, alors $7 \in [5\,;\,+\infty[$ donc 7 est dans l'un ou l'autre des intervalles $]-\infty\,;\,-5]$ et $[5\,;\,+\infty[$, ce qui s'écrit de manière mathématique : $7 \in]-\infty\,;\,-5] \cup [5\,;\,+\infty[$. L'affirmation est **vraie**.

8. Si $I \subset J$, $I \cap J$ étant l'ensemble des nombres qui appartiennent à la fois à I et J, c'est donc l'ensemble I et non J. En effet, certains éléments de J n'appartiennent pas à $I \cap J$ puisqu'ils n'appartiennent pas nécessairement à I. Par exemple, si $I = [0\,;\,+\infty[$ et $J = [-5\,;\,+\infty[$, alors $I \cap J = [0\,;\,+\infty[$, donc $I \cap J \neq J$.



L'affirmation est **fausse**.

9. $\dfrac{5}{3} = 1,66666......$ donc $0 \leqslant \dfrac{5}{3} < 1,66667$, d'où $\dfrac{5}{3} \in [0\,;\,1,66667[$. L'affirmation est **vraie**

10. L'intervalle $[0\,;\,1]$ contient une infinité de nombres décimaux puisque les nombres décimaux ne possèdent pas forcément un seul chiffre après la virgule. Par exemple, le nombre $0,158$ se trouve aussi dans l'intervalle $[0\,;\,1]$. L'affirmation est **fausse**.

Exercice 2 :

$$\begin{aligned} A &= 5-2\sqrt{9-4}+\frac{5}{6}\div\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(2\sqrt{5}\right)^2 = 5-2\sqrt{5}+\frac{5}{6}\div\left(\frac{2-3}{6}\right)+4\times 5 = 5-2\sqrt{5}+\frac{5}{6}\div\left(-\frac{1}{6}\right)+20 \\ &= 25-2\sqrt{5}-\frac{5}{6}\times 6 = 25-2\sqrt{5}-5 = \boxed{20-2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Exercice 3 :

1. S'il vend sa récolte le 1er juin, le producteur vendre 1200 kg de pommes de terre au prix de 1 euro par kilogramme donc il touchera 1200 euros.

2. S'il attend un jour, il disposera de (1200+60) kg de pommes de terre mais le prix de vente sera de (1-0,02)=0,98 euros par kilogramme. Il touchera donc $1260\times 0,98 = 1234,8$ euros.
   S'il attend 5 jours, sa récolte sera de $1200+60\times 5 = 1500$ kg de pommes de terre et le prix de vente sera de $1-0,02\times 5 = 0,9$ euros pas kilogramme. Par conséquent, il touchera $1500\times 0,9 = 1350$ euros.
   S'il attend 10 jours, il pourra vendre $1200+10\times 60 = 1800$ kg de pomme de terre avec un prix par kilogramme s'élevant à $1-10\times 0,02 = 0,8$ euros. Il touchera alors $1800\times 0,8 = 1440$ euros.

3. (a) S'il attend n jours,
   – le nombre de kilogramme augmentant chaque jour de 60, il sera alors de $1200+60n$;
   – quand au prix du kilogramme, vu qu'il diminue chaque jour de 0,02 euros, il attendra $1-0,02n$ euros.

   (b) La recette totale correspond alors au produit du nombre de kilogramme à vendre par le prix du kilo vendu soit

$$\begin{aligned} R(n) &= (1200+60n)(1-0,02n) = 1200-1200\times 0,02n+60n-60n\times 0,02n \\ &= 1200-24n+60n-1,2n^2 = -1,2n^2+36n+1200 \end{aligned}$$

4. (a) Graphiquement, on s'aperçoit que le maximum est atteint pour $n=15$ et vaut environ 1500 euros : en effet, on mesure approximativement 1,7 cm en ordonnée alors que 400 correspond à 0,45 cm donc la valeur maximale est environ égale à $\dfrac{1,7\times 400}{0,45}\simeq 1510$. Plus précisément, puisque le maximum à l'air atteint pour $n=15$, on peut calculer $R(15)$: $R(15) = -1,2\times 15^2+36\times 15+1200 = 1470$. Cette valeur est en fait la valeur exacte de la recette maximale.

   (b) D'après le graphique, la recette est à nouveau de 1200 euros pour $n=30$. Pour le déterminer par le calcul, on résout :

$$R(n) = 1200 \;\Leftrightarrow\; -1,2n^2+36n+1200 = 1200 \;\Leftrightarrow\; -1,2n^2+36n = 0 \;\Leftrightarrow\; n(-1,2n+36) = 0$$

   Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul donc l'équation précédente équivaut à $n=0$ ou $-1,2n+36=0$. On résout cette dernière équation : $-1,2n=-36$ soit $n = \dfrac{-36}{-\frac{12}{10}} = \dfrac{36}{\frac{6}{5}} = 36\times\dfrac{5}{6} = 6\times 5 = 30$. On retrouve la valeur lue graphiquement. C'est donc 30 jours après le 1er juin, c'est-à-dire le 1er juillet que la recette est à nouveau égale à 1200 euros.

   (c) Le producteur n'a pas intérêt à attendre plus de 30 jours avant de vendre ses pommes de terre puisque, d'après le graphique, une fois passé ce délai la recette semble diminuer pour atteindre au bout de 50 jours une valeur nulle.

Exercice 4 :

a) x est une longueur (donc un nombre réel positif) qui ne peut pas dépasser la mesure du troisième côté. On calcule donc la longueur du troisième côté à l'aide du théorème de Pythagore dans le triangle rectangle. Pour que le rectangle à l'intérieur du triangle existe, on doit même supposer que x est strictement positif et strictement inférieur au troisième côté. Si on note $AB=3$ et $AC=5$, le troisième côté BC vérifie la relation : $AC^2 = AB^2+BC^2$ soit $BC^2 = 25-9 = 16$ donc $BC=\sqrt{16}=4$. Ainsi, $0<x<4$, ce qui s'écrit encore $\boxed{x\in\,]0\,;\,4[}$.

b) Il s'agit d'un triangle isocèle, on note A son sommet principal et H le pied de la hauteur issue de A. On note B le sommet de gauche du grand triangle isocèle et C celui de droite. D'après le graphique, x est un nombre positif qui ne peut pas dépasser la mesure de la longueur BH ($0 < x < BH$ pour que l'on puisse tracer le rectangle qui apparait à l'intérieur du triangle). Dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principal est confondue avec sa médiatrice donc H est également le milieu de $[BC]$. Ainsi, $BH = \dfrac{10}{2} = 5$ et $0 < x < 5$, ce qui s'écrit encore $\boxed{x \in]0\,;\,5[}$.

c) On note $ABCD$ le gros carré en choisissant A le sommet en haut à gauche et B celui en haut à droite. x est un nombre positif qui ne peut pas dépasser la mesure de la diagonale $[AC]$. Pour que les segments (l'un vertical et l'autre horizontal) tracés à l'intérieur du carré existent, il faut même supposer que $0 < x < AC$. On calcule AC en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle ACD rectangle en D : $AC^2 = AD^2 + DC^2 = 10^2 + 10^2 = 100 + 100 = 200$ d'où $AC = \sqrt{200} = \sqrt{2} \times \sqrt{100} = 10\sqrt{2}$. Ainsi, $0 < x < 10\sqrt{2}$ soit $\boxed{x \in]0\,;\,10\sqrt{2}[}$.