Lycée J.P Vernant - 2nde 14 Année scolaire 2015-2016
Mathématiques

CORRECTION DU CONTRÔLE N° 5

SUJET (a)

Exercice 1 : voir annexe

Exercice 2 :

1. Tableau de variations :

x	-5		0		3		7
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	-10

En effet, la courbe coupe l'axe des abcisses au point d'abscisse -5 donc $f(-5) = 0$.
Le point d'intersection entre la courbe $\mathcal{C}_f$ et l'axe des ordonnées a pour ordonnée -2 donc $f(0) = -2$.
3 est un antécédent de 4 par f d'où $f(3) = 4$.
Enfin, le minimum de f est -10 et comme $f(0) = -2 > -10$, ce minimum est atteint en 7. Ainsi, $f(7) = -10$

2. • $\dfrac{9}{3} < \dfrac{11}{3} < \dfrac{12}{3}$ soit $3 < \dfrac{11}{3} < 4$. De plus, $\dfrac{28}{7} < \dfrac{29}{7} < \dfrac{49}{7}$ donc $4 < \dfrac{29}{7} < 7$.
Par conséquent, $3 < \dfrac{11}{3} < 4 < \dfrac{29}{7} < 7$. La fonction f est décroissante sur $[3\,;\,7]$ d'où $f\left(\dfrac{11}{3}\right) \geqslant f\left(\dfrac{29}{7}\right)$.

• Comme on sait que la courbe $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses 2 et 5,5 (en plus du point d'abscisse -5), on peut rajouter ces informations sur le tableau de variations.

x	-5		0		2		3		$5{,}5$		7
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\searrow$	-10

Comme $-5 < -4 < 2$ et f est décroissante sur $[-5\,;\,2]$ d'où $f(-5) \geqslant f(-4)$ soit $f(-4) \leqslant 0$.
On remarque que $3 < 5 < 5,5$ et f est décroissante sur $[3\,;\,7]$ donc $f(5) \geqslant f(5,5)$, c'est-à-dire $f(5) \geqslant 0$.
Finalement, $f(-4) \leqslant 0 \leqslant f(5)$ d'où $f(-4) \leqslant f(5)$.

3. On suppose que $x \in [-5\,;\,2]$. Deux cas sont alors envisageables :
   • *1er cas* : $-5 \leqslant x \leqslant 0$.
   Comme f est décroissante sur $[-5\,;\,0]$ alors $f(-5) \geqslant f(x)$. Or, $f(-5) = 0$ d'où $f(x) \leqslant 0$.
   • *2ème cas* : $0 \leqslant x \leqslant 2$.
   Comme f est croissante sur $[0\,;\,3]$ alors $f(x) \leqslant f(2)$. Or, $f(2) = 0$ d'où $f(x) \leqslant 0$.

   Dans les deux cas, on a obtenu $f(x) \leqslant 0$ donc $f(x)$ est négatif si $x \in [-5\,;\,2]$.

4. L'équation $f(x) = 2$ admet deux solutions : l'une sur l'intervalle $[2\,;\,3]$ et l'autre sur l'intervalle $[3\,;\,5,5]$ d'après le tableau de variations complété en annexe.

5. (a) voir annexe
   (b) Les solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ qui se trouvent strictement en dessous de l'axe des abscisses (voir annexe pour visualiser les points de la courbe correspondant à cette description). L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =]-5\,;\,2[\cup]5,5\,;\,7]$.

Exercice 3 :

1. (a) On sait que $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{3}$ donc, en multipliant par $-\frac{7}{3} < 0$, on obtient : $0 \geqslant -\frac{7}{3}a \geqslant -\frac{7}{9}$. On ajoute ensuite 3 : $3 \geqslant 3 - \frac{7}{3}a \geqslant 3 - \frac{7}{9}$ soit $3 \geqslant 3 - \frac{7}{3}a \geqslant \frac{27-7}{9}$. Finalement, $3 \geqslant 3 - \frac{7}{3}a \geqslant \frac{20}{9}$.

   L'encadrement attendu est donc $\boxed{\frac{20}{9} \leqslant 3 - \frac{7}{3}a \leqslant 3}$.

   On utilise les deux encadrements : $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{3}$ et $\frac{20}{9} \leqslant 3 - \frac{7}{3}a \leqslant 3$. Comme tous les nombres de ces encadrements sont postitifs, on applique la multiplication membre à membre :

$$0 \times \frac{20}{9} \leqslant a\left(3 - \frac{7}{3}a\right) \leqslant \frac{1}{3} \times 3 \text{ soit } \boxed{0 \leqslant a\left(3 - \frac{7}{3}a\right) \leqslant 1}$$

   (b) Pour comparer A et B, on étudie le signe de leur différence : $A - B = 3a - \frac{7}{3}a^2 = a\left(3 - \frac{7}{3}a\right)$.

   On a justifié que $0 \leqslant a\left(3 - \frac{7}{3}a\right) \leqslant 1$ à la question précédente donc en particulier $A - B \geqslant 0$ c'est-à-dire que $A \geqslant B$.

2.

$$\frac{x+7}{6} \leqslant \frac{x}{2} - \frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{2(x+7)}{12} \leqslant \frac{6x}{12} - \frac{27}{12} \Leftrightarrow 2x+14 \leqslant 6x-27 \Leftrightarrow 2x-6x \leqslant -14-27 \Leftrightarrow -4x \leqslant -41 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{41}{4}$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left[\frac{41}{4}\ ;+\infty\right[$.

Exercice 4 :

1. voir annexe
2. Comme MNP et MPC sont équilatéraux alors $MN = NP = MP$ et $MP = PC = MC$. Par conséquent, $MN = NP = MP = PC = MC$. En particulier les côtés du quadrilatère $MNPC$ sont de même longueur donc c'est un losange. Un losange étant un parallélogramme particulier, on en déduit que $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{PN}$.
3. (a) voir annexe

   (b) Comme L est l'image de N par la translation de vecteur $\overrightarrow{KM}$ alors $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{NL}$ et le quadrilatère $KNLM$ est alors un parallélogramme. On sait de plus que $MNPC$ est un losange donc ses diagonales $[MP]$ et $[NC]$ sont perpendiculaires. Comme K est le milieu de la diagonale $[MP]$ et que les diagonales d'un losange se coupent en leur milieu, on en déduit K est le centre du losange $MNPC$ et en particulier $(MP) = (KM)$ et $(NC) = (KN)$. Ainsi, (KM) est perpendiculaire à (KN) donc le parallélogramme $KNLM$ possède un angle droit. C'est donc un rectangle.

   (c) On sait que $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{NL}$ puisque L est l'image de N par la translation de vecteur $\overrightarrow{KM}$. Comme K est le milieu de $[PM]$ alors $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{PK}$ d'où $\overrightarrow{PK} = \overrightarrow{KM} = \overrightarrow{NL}$. L'égalité vectorielle $\overrightarrow{PK} = \overrightarrow{NL}$ signifie que L est l'image de N par la translation de vecteur $\overrightarrow{PK}$.
4. (a) voir annexe

   (b) Comme $\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{PK} + \overrightarrow{PL}$ alors $PKFL$ est un parallélogramme d'après la règle du parallélogramme. Cela implique que $\overrightarrow{LF} = \overrightarrow{PK}$.

   (c) On a déjà justifié à la question 3.c) que $\overrightarrow{PK} = \overrightarrow{NL}$. On vient de justifier que $\overrightarrow{LF} = \overrightarrow{PK}$ donc $\overrightarrow{LF} = \overrightarrow{PK} = \overrightarrow{NL}$. Or l'égalité vectorielle $\overrightarrow{LF} = \overrightarrow{NL}$ signifie que L est le milieu de $[NF]$.
5. (a) On a montré à la question 3.b) que $KNLM$ est un rectangle, c'est donc en particulier un parallélogramme d'où $\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{KN}$. On a justifié à la question 4.b) que $\overrightarrow{LF} = \overrightarrow{PK}$. On en déduit que $\overrightarrow{ML} + \overrightarrow{LF} = \overrightarrow{KN} + \overrightarrow{PK}$.

(b) A l'aide de la relation de Chasles, on obtient que $\overrightarrow{ML}+\overrightarrow{LF}=\overrightarrow{MF}$ et $\overrightarrow{KN}+\overrightarrow{PK}=\overrightarrow{PK}+\overrightarrow{KN}=\overrightarrow{PN}$. La relation obtenue à la question précédente s'écrit alors $\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{PN}$. D'après la question 2, $\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{CM}$ donc $\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{CM}$.

(c) La relation vectorielle $\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{CM}$ signifie que M est le milieu de $[CF]$.

6. $\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{FN}=\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{FN}=\overrightarrow{FN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{FM}$

Exercice 5 :

1. – *Forme développée* :

$$\begin{aligned} f(x) &= 12-3x^2-(2x+9)(x-2)=12-3x^2-(2x^2-4x+9x-18)=12-3x^2-2x^2+4x-9x+18 \\ &= -5x^2-5x+30 \end{aligned}$$

– *Forme factorisée* :

$$\begin{aligned} f(x) &= 12-3x^2-(2x+9)(x-2)=3(4-x^2)-(2x+9)(x-2)=3(2-x)(2+x)+(2x+9)(2-x) \\ &= (2-x)[3(2+x)+(2x+9)]=(2-x)(6+3x+2x+9)=(2-x)(5x+15)=5(2-x)(x+3) \end{aligned}$$

2. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} \frac{125}{4}-5\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{125}{4}-5\left(x^2+2x\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)=\frac{125}{4}-5\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{125}{4}-5x^2-5x-\frac{5}{4}=-5x^2-5x+\frac{120}{4}=-5x^2-5x+30 \end{aligned}$$

En développant $\frac{125}{4}-5\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$, on retrouve la forme développée de $f(x)$ donc $f(x)=\frac{125}{4}-5\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ pour tout x réel.

3. (a) Pour calculer l'image de $-\frac{9}{2}$ par f on utilise la forme initiale :

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{9}{2}\right) &= 12-3\times\left(-\frac{9}{2}\right)^2-\left(2\times\left(-\frac{9}{2}\right)+9\right)\left(-\frac{9}{2}-2\right)=12-3\times\frac{81}{4}-(-9+9)\left(-\frac{9}{2}-2\right) \\ &= \frac{48}{4}-\frac{243}{4}-0\times\left(-\frac{9}{2}-2\right)=-\frac{195}{4} \end{aligned}$$

Pour calculer $f(\sqrt{2})$, on se sert de la forme développée de $f(x)$:

$$f(\sqrt{2})=-5\times\left(\sqrt{2}\right)^2-5\sqrt{2}+30=-5\times 2-5\sqrt{2}+30=-10-5\sqrt{2}+30=20-5\sqrt{2}$$

(b) Pour résoudre $f(x)=0$, on utilise la forme factorisée de $f(x)$: $f(x)=0 \Leftrightarrow 5(2-x)(x+3)=0$.
Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. Comme $5\neq 0$, on obtient $2-x=0$ ou $x+3=0$ soit $x=2$ ou $x=-3$. L'ensemble des solutions est alors $\mathcal{S}=\{2\,;\,-3\}$.

(c) Pour déterminer les antécédents de 30 par f, on résout l'équation $f(x)=30$ à l'aide de la forme développée de $f(x)$: $f(x)=30 \Leftrightarrow -5x^2-5x+30=30 \Leftrightarrow -5x^2-5x=0 \Leftrightarrow -5x(x+1)=0$.
Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. On obtient $-5x=0$ ou $x+1=0$ soit $x=0$ ou $x=-1$. Le nombre 30 admet deux antécédents par la fonction f, ce sont les nombres 0 et -1.

(d) Le nombre M est le maximum d'une fonction f sur un intervalle I si $f(x)\leqslant M$ pour tout $x\in I$ et si M admet un antécédent par la fonction f.
On sait que $f(x)=\frac{125}{4}-5\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ pour tout x réel. Comme un carré est toujours positif, $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0$ pour tout x réel. On en déduit que $-5\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\leqslant 0$ pour tout x réel (car $-5>0$)

puis que $\dfrac{125}{4} - 5\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 \leqslant \dfrac{125}{4}$ pour tout réel x. Finalement, $f(x) \leqslant \dfrac{125}{4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
De plus,

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{125}{4} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{125}{4} - 5\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{125}{4} \;\Leftrightarrow\; -5\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x+\frac{1}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

On en déduit que $\dfrac{125}{4} = 31,25$ est le maximum de f et il est atteint en $-\dfrac{1}{2}$.

SUJET (b)

Exercice 1 : voir annexe

Exercice 2 :

1. Tableau de variations :

x	-7		0		3		5
			2				0
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	-8				-4		

En effet, la courbe coupe l'axe des abcisses au point d'abscisse 5 donc $f(5) = 0$.
Le point d'intersection entre la courbe $\mathcal{C}_f$ et l'axe des ordonnées a pour ordonnée 2 donc $f(0) = 2$.
3 est un antécédent de -4 par f d'où $f(3) = -4$.
Enfin, le minimum de f est -8 et comme $f(3) = -4 > -8$, ce minimum est atteint en -7. Ainsi, $f(7) = -8$

2. • $0 < \dfrac{13}{7} < \dfrac{14}{7}$ soit $0 < \dfrac{13}{7} < 2$. De plus, $\dfrac{22}{11} < \dfrac{25}{11} < \dfrac{33}{11}$ donc $2 < \dfrac{25}{11} < 3$.
Par conséquent, $0 < \dfrac{13}{7} < 2 < \dfrac{25}{11} < 3$. La fonction f est décroissante sur $[0\,;\,3]$ d'où $f\left(\dfrac{13}{7}\right) \geqslant f\left(\dfrac{25}{11}\right)$.

• Comme on sait que la courbe $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses $4,5$ et 1 (en plus du point d'abscisse 5), on peut rajouter ces informations sur le tableau de variations.

x	-7		$-4,5$		0		1		3		5
					2						0
				$\nearrow$		$\searrow$				$\nearrow$	
$f(x)$			0				0				
		$\nearrow$						$\searrow$		$\nearrow$	
	-8								-4		

Comme $-4,5 < -3 < 0$ et f est croissante sur $[-7\,;\,0]$ d'où $f(-4,5) \leqslant f(-3)$ soit $f(-3) \geqslant 0$.
On remarque que $3 < 4 < 5$ et f est croissante sur $[3\,;\,5]$ donc $f(4) \leqslant f(5)$, c'est-à-dire $f(4) \leqslant 0$.

Finalement, $f(4) \leqslant 0 \leqslant f(-3)$ d'où $f(4) \leqslant f(-3)$.

3. On suppose que $x \in [1\,;\,5]$. Deux cas sont alors envisageables :
   - *1^er^ cas* : $1 \leqslant x \leqslant 3$.
     Comme f est décroissante sur $[1\,;\,3]$ alors $f(1) \geqslant f(x)$. Or, $f(1) = 0$ d'où $f(x) \leqslant 0$.
   - *2^ème^ cas* : $3 \leqslant x \leqslant 5$.
     Comme f est croissante sur $[3\,;\,5]$ alors $f(x) \leqslant f(5)$. Or, $f(5) = 0$ d'où $f(x) \leqslant 0$.

   Dans les deux cas, on a obtenu $f(x) \leqslant 0$ donc $f(x)$ est négatif si $x \in [1\,;\,5]$.

4. L'équation $f(x) = 1$ admet deux solutions : l'une sur l'intervalle $[-4,5\,;\,0]$ et l'autre sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ d'après le tableau de variations complété en annexe.

5. (a) voir annexe

   (b) Les solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ qui se trouvent strictement en dessous de l'axe des abscisses (voir annexe pour visualiser les points de la courbe correspondant à cette description). L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = [-7\,;\,-4,5[\cup]1\,;\,5[$.

Exercice 3 :

1. (a) On sait que $0 \leqslant a \leqslant \dfrac{1}{2}$ donc, en multipliant par $-\dfrac{5}{3} < 0$, on obtient : $0 \geqslant -\dfrac{5}{3}a \geqslant -\dfrac{5}{6}$. On ajoute ensuite 2 : $2 \geqslant 2 - \dfrac{5}{3}a \geqslant 2 - \dfrac{5}{6}$ soit $2 \geqslant 2 - \dfrac{5}{3}a \geqslant \dfrac{12-5}{6}$. Finalement, $2 \geqslant 2 - \dfrac{5}{3}a \geqslant \dfrac{7}{6}$.

L'encadrement attendu est donc $\boxed{\frac{7}{6} \leqslant 2 - \frac{5}{3}a \leqslant 2}$.

On utilise les deux encadrements : $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$ et $\frac{7}{6} \leqslant 2 - \frac{5}{3}a \leqslant 2$. Comme tous les nombres de ces encadrements sont postitifs, on applique la multiplication membre à membre :

$$0 \times \frac{7}{6} \leqslant a\left(2 - \frac{5}{3}a\right) \leqslant \frac{1}{2} \times 2 \text{ soit } \boxed{0 \leqslant a\left(2 - \frac{5}{3}a\right) \leqslant 1}$$

(b) Pour comparer A et B, on étudie le signe de leur différence : $A - B = 2a - \frac{5}{3}a^2 = a\left(2 - \frac{5}{3}a\right)$.

On a justifié que $0 \leqslant a\left(2 - \frac{5}{3}a\right) \leqslant 1$ à la question précédente donc en particulier $A - B \geqslant 0$ c'est-à-dire que $A \geqslant B$.

2.

$$\frac{7}{4} - \frac{x}{2} \leqslant \frac{4x+5}{6} \Leftrightarrow \frac{21}{12} - \frac{6x}{12} \leqslant \frac{2(4x+5)}{12} \Leftrightarrow 21 - 6x \leqslant 8x + 10 \Leftrightarrow -6x - 8x \leqslant 10 - 21 \Leftrightarrow -14x \leqslant -11$$

$$\Leftrightarrow x \geqslant \frac{-11}{-14} \Leftrightarrow x \geqslant \frac{11}{14}$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left[-\frac{31}{14}\,;\, +\infty\right[$.

Exercice 4 :

1. voir annexe
2. Comme ABC et ABD sont équilatéraux alors $AC = BC = AB$ et $AB = AD = BD$. Par conséquent, $AC = BC = AB = AD = BD$. En particulier les côtés du quadrilatère $ACBD$ sont de même longueur donc c'est un losange. Un losange étant un parallélogramme particulier, on en déduit que $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC}$.
3. (a) voir annexe

   (b) Comme K est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{IA}$ alors $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{CK}$ et le quadrilatère $ICKA$ est alors un parallélogramme. On sait de plus que $ACBD$ est un losange donc ses diagonales $[AB]$ et $[CD]$ sont perpendiculaires. Comme I est le milieu de la diagonale $[AB]$ et que les diagonales d'un losange se coupent en leur milieu, on en déduit I est le centre du losange $ACBD$ et en particulier $(AB) = (IA)$ et $(CD) = (IC)$. Ainsi, (IA) est perpendiculaire à (IC) donc le parallélogramme $ICKA$ possède un angle droit. C'est donc un rectangle.

   (c) On sait que $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{CK}$ puisque K est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{IA}$. Comme I est le milieu de $[AB]$ alors $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BI}$ d'où $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BI}$. L'égalité vectorielle $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{CK}$ signifie que K est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BI}$.
4. (a) voir annexe

   (b) Comme $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{BK}$ alors $BKMI$ est un parallélogramme d'après la règle du parallélogramme. Cela implique que $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{BI}$.

   (c) On a déjà justifié à la question 3.c) que $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{CK}$. On vient de justifier que $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{BI}$ donc $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{CK}$. Or l'égalité vectorielle $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{CK}$ signifie que K est le milieu de $[MC]$.
5. (a) On a montré à la question 3.b) que $ICKA$ est un rectangle, c'est donc en particulier un parallélogramme d'où $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{IC}$. On a justifié à la question 4.b) que $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{BI}$. On en déduit que $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KM} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{BI}$.

   (b) A l'aide de la relation de Chasles, on obtient que $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KM} = \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{BC}$. La relation obtenue à la question précédente s'écrit alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$. D'après la question 2, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$ donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DA}$.

   (c) La relation vectorielle $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DA}$ signifie que A est le milieu de $[MD]$.
6. $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MA}$

Exercice 5 :

1. – *Forme développée* :

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2-3-(2x+7)(1-x) = 3x^2-3-(2x-2x^2+7-7x) = 3x^2-3-2x+2x^2-7+7x \\ &= 5x^2+5x-10 \end{aligned}$$

   – *Forme factorisée* :

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2-3-(2x+7)(1-x) = 3(x^2-1)-(2x+7)(1-x) = 3(x-1)(x+1)+(2x+7)(x-1) \\ &= (x-1)[3(x+1)+(2x+7)] = (x-1)(3x+3+2x+7) = (x-1)(5x+10) = 5(x-1)(x+2) \end{aligned}$$

2. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} 5\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{45}{4} &= 5\left(x^2+2x\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)-\frac{45}{4} = 5\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)-\frac{45}{4} \\ &= 5x^2+5x+\frac{5}{4}-\frac{45}{4} = 5x^2+5x-\frac{40}{4} = 5x^2+5x-10 \end{aligned}$$

   En développant $5\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{45}{4}$, on retrouve la forme développée de $f(x)$ donc $f(x)=5\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{45}{4}$ pour tout x réel.

3. (a) Pour calculer l'image de $-\frac{7}{2}$ par f on utilise la forme initiale :

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{7}{2}\right) &= 3\times\left(-\frac{7}{2}\right)^2-3-\left(2\times\left(-\frac{7}{2}\right)+7\right)\left(1+\frac{7}{2}\right) = 3\times\frac{49}{4}-3-(-7+7)\left(1+\frac{7}{2}\right) \\ &= \frac{147}{4}-\frac{12}{4}-0\times\left(1+\frac{7}{2}\right) = \frac{135}{4} \end{aligned}$$

   Pour calculer $f(\sqrt{3})$, on se sert de la forme développée de $f(x)$:

$$f(\sqrt{2}) = 5\times\left(\sqrt{3}\right)^2+5\sqrt{3}-10 = 5\times 3+5\sqrt{3}-10 = 15+5\sqrt{3}-10 = 5+5\sqrt{3}$$

   (b) Pour résoudre $f(x)=0$, on utilise la forme factorisée de $f(x)$: $f(x)=0 \ \Leftrightarrow\ 5(x-1)(x+2)=0$.
   Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. Comme $5\neq 0$, on obtient $x-1=0$ ou $x+2=0$ soit $x=1$ ou $x=-2$. L'ensemble des solutions est alors $\mathcal{S}=\{1\,;\,-2\}$.

   (c) Pour déterminer les antécédents de 10 par f, on résout l'équation $f(x)=-10$ à l'aide de la forme développée de $f(x)$: $f(x)=-10 \ \Leftrightarrow\ 5x^2+5x-10=-10 \ \Leftrightarrow\ 5x^2+5x=0 \ \Leftrightarrow\ 5x(x+1)=0$.
   Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. On obtient $5x=0$ ou $x+1=0$ soit $x=0$ ou $x=-1$. Le nombre -10 admet deux antécédents par la fonction f, ce sont les nombres 0 et -1.

   (d) Le nombre m est le maximum d'une fonction f sur un intervalle I si $f(x)\geqslant m$ pour tout $x\in I$ et si m admet un antécédent par la fonction f.
   On sait que $f(x)=5\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{45}{4}$ pour tout x réel. Comme un carré est toujours positif, $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0$ pour tout x réel. On en déduit que $5\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0$ pour tout x réel (car $5>0$) puis que $5\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{45}{4}\geqslant -\frac{45}{4}$ pour tout réel x. Finalement, $f(x)\geqslant -\frac{45}{4}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
   De plus,

$$\begin{aligned} f(x)=-\frac{45}{4} \quad &\Leftrightarrow\quad 5\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{45}{4}=-\frac{45}{4} \ \Leftrightarrow\ 5\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=0 \ \Leftrightarrow\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2=0 \ \Leftrightarrow\ x+\frac{1}{2}=0 \\ &\Leftrightarrow\quad x=-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

   On en déduit que $-\frac{45}{4}=-11,25$ est le minimum de f et il est atteint en $-\frac{1}{2}$.