CORRECTION DU CONTROLE N° 3 - bis

SUJET (a)

Exercice 1 : voir annexe

Exercice 2 :

1. On représente la situation à l'aide d'un tableau à double entrée, en indiquant la somme des numéros des boules pour chacun des tirages :

sac bleu \ sac rouge	0	2	4
0	0	2	4
1	1	3	5
3	3	5	7

L'univers des issues possibles est alors $\Omega = \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,7\}$.

2. Toutes les issues de Ω ne sont pas équiprobables puisqu'on obtient plus souvent une somme égale à 3 (tirage de la boule 0 dans le sac rouge et de la boule 3 dans le sac bleu ou encore tirage de la boule 2 dans le sac rouge et de la boule 1 dans le sac bleu) par exemple qu'une somme égale à 0 (cela arrive uniquement lorsqu'on tire les deux boules 0).

3. (a) L'évenement $A \cap B$ correspond à : "la boule du sac rouge ne porte pas le numéro 0 et la somme obtenue est paire". C'est par exemple le cas lorsqu'on tire la boule 0 du sac bleu et la boule 2 du sac rouge. Cela signifie que $A \cap B \neq \emptyset$ donc A et B ne sont pas disjoints.

   (b) L'événement $\overline{A \cup B}$ est le contraire de "la boule du sac rouge ne porte pas le numéro 0 ou bien la somme est paire", cela correspond donc à $\overline{A} \cap \overline{B}$, c'est-à-dire "la boule du sac rouge porte le numéro 0 et la somme obtenue est impaire". Il y a deux tirages possibles dans cet événement :
   - on tire la boule 0 du sac rouge et la boule 1 du sac bleu
   - on tire la boule 0 du sac rouge et la boule 3 du sac bleu.

Exercice 3 :

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$ d'après la relation de Chasles.
- $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}$.
- Comme O est le centre du losange $ABCD$, c'est le milieu de sa diagonale $[BD]$. De plus, I est le milieu de $[EC]$ et $EBCD$ est un parallélogramme donc (EI) est parallèle à (OD) et $EI = \frac{1}{2}EC = \frac{1}{2}BD = OD$. Les vecteurs $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{DO}$ ont donc même direction, même norme mais un sens contraire. Finalement, $\overrightarrow{EI} = -\overrightarrow{DO}$ donc $\overrightarrow{EI} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DO} = -\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{BA}$.

  Remarque : les réponses $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{IO}$ et $\overrightarrow{CD}$ étaient également correctes.
- $\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IB}$. Comme $ABCD$ est un losange alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. De plus $EBDC$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BE}$. Ainsi, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BE}$.

  Par conséquent, $\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{IE}$. On a déjà remarqué que $\overrightarrow{EI} = -\overrightarrow{DO}$ donc $\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$ puisque O est le milieu de $[BD]$. Finalement, $\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CB}$.

  Remarque : la réponse $\overrightarrow{DA}$ était également correcte.

Exercice 4 :

1. (a) $(2x-3)^2 = 16 \Leftrightarrow (2x-3)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (2x-3-4)(2x-3+4) = 0 \Leftrightarrow (2x-7)(2x+1) = 0$. Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. L'équation équivaut donc à

$2x-7=0$ ou $2x+1=0$. Or, $2x-7=0 \Leftrightarrow 2x=7 \Leftrightarrow x=\dfrac{7}{2}$ et $2x+1=0 \Leftrightarrow 2x=-1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\{\dfrac{7}{2}\,;\,-\dfrac{1}{2}\}$.

(b) On commence par chercher les éventuelles valeurs interdites : $2x+12=0 \Leftrightarrow 2x=-12 \Leftrightarrow x=-6$. On résout $\dfrac{x^2+36}{2x+12}=0$ pour $x\neq -6$. Un quotient est nul lorsque son numérateur est nul donc on aboutit à $x^2+36=0$, c'est-à-dire $x^2=-36$. Or un carré est toujours positif, donc cette équation n'admet pas de solution. Finalement, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\emptyset$.

(c) $x-1=\dfrac{x}{2}+\dfrac{3-x}{3} \Leftrightarrow x-1=\dfrac{3x}{6}+\dfrac{2(3-x)}{6} \Leftrightarrow x-1=\dfrac{3x+6-2x}{6} \Leftrightarrow x-1=\dfrac{x+6}{6}$.
On multiplie par 6 chacun des membres, l'équation équivaut alors à :

$$6(x-1)=x+6 \Leftrightarrow 6x-6=x+6 \Leftrightarrow 5x=12 \Leftrightarrow x=\frac{12}{5}$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\{\dfrac{12}{5}\}$.

(d)

$$\begin{aligned} 2x-2x^2=(x-1)(5x+3) &\Leftrightarrow 2x(1-x)-(x-1)(5x+3)=0 \Leftrightarrow 2x(1-x)+(1-x)(5x+3)=0\\ &\Leftrightarrow (1-x)(2x+5x+3)=0 \Leftrightarrow (1-x)(7x+3)=0\end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, cette équation équivaut alors à $1-x=0$ ou $7x+3=0$. Or $1-x=0 \Leftrightarrow x=1$ et $7x+3=0 \Leftrightarrow 7x=-3 \Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{7}$.
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\{1\,;\,-\dfrac{3}{7}\}$.

(e) $\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{8}{x} \Leftrightarrow \dfrac{x}{x-2}-\dfrac{8}{x}=0$. On cherche les valeurs interdites : on résout $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ et $x=0$. On résout donc cette équation pour $x\neq 2$ et $x\neq 0$.

$$\frac{x}{x-2}-\frac{8}{x}=0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x(x-2)}-\frac{8(x-2)}{x(x-2)}=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-8x+16}{x(x-2)}=0$$

Un quotient est nul lorsque son numérateur est nul donc pour $x\neq 0$ et $x\neq 2$, l'équation précédente équivaut à $x^2-8x+16=0 \Leftrightarrow (x-4)^2=0 \Leftrightarrow x-4=0 \Leftrightarrow x=4$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\{4\}$.

2. Comme A se trouve sur le cercle de diamètre $[BC]$ alors ABC est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore, $BC^2=AB^2+AC^2$. On sait également que ABC est isocèle en A dpnc $AB=AC=x$ et l'égalité précédente devient $2x^2=6^2$ soit $x^2=\dfrac{36}{2}=18$. Or, x désigne ici une longueur d'où $x\geqslant 0$ et $x=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

Exercice 5 :

1. voir annexe
2. voir annexe
3. (a) On sait que $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AD}$ donc $\vec{w}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CE}$

   (b) Par définition, $\overrightarrow{EF}=\vec{w}=\overrightarrow{CE}$. Cela signifie que E est le milieu de $[CF]$.
4. (a) $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{FA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP}=-\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{FA}\right)=-\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}$. Grâce à cette égalité vectorielle, on peut placer P (voir annexe).

   (b) Comme $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}$, cela signifie, d'après la règle du parallélogramme que $ACPF$ est un parallélogramme. En particulier, ses diagonales se coupent en leur milieu. On a justifié que E est le milieu de $[CF]$ au 3b) donc E est également le milieu de la diagonale $[AP]$, ce qui se traduit vectoriellement par $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EP}$.
5. L'ensemble des points M tels que $BM=DA$ correspond au cercle de centre B et de rayon DA (voir annexe pour le tracé)

SUJET (b)

Exercice 1 : voir annexe

Exercice 2 :

1. On représente la situation à l'aide d'un tableau à double entrée, en indiquant la somme des numéros des boules pour chacun des tirages :

sac bleu \ sac rouge	0	3	5
0	0	3	5
2	2	5	7
4	4	7	9

   L'univers des issues possibles est alors $\Omega = \{0\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,7\,;\,9\}$.

2. Toutes les issues de Ω ne sont pas équiprobables puisqu'on obtient plus souvent une somme égale à 5 (tirage de la boule 0 dans le sac bleu et de la boule 5 dans le sac rouge ou encore tirage de la boule 3 dans le sac rouge et de la boule 2 dans le sac bleu) par exemple qu'une somme égale à 0 (cela arrive uniquement lorsqu'on tire les deux boules 0).

3. (a) L'évenement $A \cap B$ correspond à : "la boule du sac bleu ne porte pas le numéro 0 et la somme obtenue est paire". C'est par exemple le cas lorsqu'on tire la boule 0 du sac rouge et la boule 4 du sac bleu. Cela signifie que $A \cap B \neq \emptyset$ donc A et B ne sont pas disjoints.

   (b) L'événement $\overline{A \cup B}$ est le contraire de "la boule du sac bleu ne porte pas le numéro 0 ou bien la somme est paire", cela correspond donc à $\overline{A} \cap \overline{B}$, c'est-à-dire "la boule du sac bleu porte le numéro 0 et la somme obtenue est impaire". Il y a deux tirages possibles dans cet événement :
   - on tire la boule 0 du sac bleu et la boule 3 du sac rouge
   - on tire la boule 0 du sac bleu et la boule 5 du sac rouge.

Exercice 3 :

- $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CB}$ d'après la relation de Chasles.
- $\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CE}$.
- Comme O est le centre du losange $ABCD$, c'est le milieu de sa diagonale $[BD]$. De plus, I est le milieu de $[EC]$ et $EBCD$ est un parallélogramme donc (EI) est parallèle à (OD) et $EI = \frac{1}{2}EC = \frac{1}{2}BD = OD$. Les vecteurs $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{DO}$ ont donc même direction, même norme mais un sens contraire. Finalement, $\overrightarrow{EI} = -\overrightarrow{DO}$ donc $\overrightarrow{EI} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DO} = -\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{BA}$.

  Remarque : les réponses $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{IO}$ et $\overrightarrow{CD}$ étaient également correctes.
- $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BI}$. Comme O est le milieu de la diagonale $[AC]$ du losange $ABCD$ alors $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$. Par conséquent, $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{BI}$. On a déjà remarqué que $\overrightarrow{EI} = -\overrightarrow{DO}$ donc $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{IC}$ puisque I est le milieu de $[EC]$.

  Finalement, $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{BC}$.

  Remarque : la réponse $\overrightarrow{AD}$ était également correcte.

Exercice 4 :

1. (a) On commence par chercher les éventuelles valeurs interdites : $2x + 10 = 0 \Leftrightarrow 2x = -10 \Leftrightarrow x = -5$. On résout $\frac{x^2 + 25}{2x + 10} = 0$ pour $x \neq -5$. Un quotient est nul lorsque son numérateur est nul donc on aboutit à $x^2 + 25 = 0$, c'est-à-dire $x^2 = -25$. Or un carré est toujours positif, donc cette équation n'admet pas de solution. Finalement, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \emptyset$.

   (b) $x - 2 = \frac{x}{3} + \frac{2 - x}{2} \Leftrightarrow x - 2 = \frac{2x}{6} + \frac{3(2 - x)}{6} \Leftrightarrow x - 2 = \frac{2x + 6 - 3x}{6} \Leftrightarrow x - 2 = \frac{-x + 6}{6}$.

On multiplie par 6 chacun des membres, l'équation équivaut alors à :

$$6(x-2) = -x+6 \Leftrightarrow 6x-12 = -x+6 \Leftrightarrow 7x = 18 \Leftrightarrow x = \frac{18}{7}$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{\frac{18}{7}\}$.

(c) $(5x-4)^2 = 9 \Leftrightarrow (5x-4)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (5x-4-3)(5x-4+3) = 0 \Leftrightarrow (5x-7)(5x-1) = 0$. Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. L'équation équivaut donc à $5x-7=0$ ou $5x-1=0$. Or, $5x-7=0 \Leftrightarrow 5x=7 \Leftrightarrow x=\frac{7}{5}$ et $5x-1=0 \Leftrightarrow 5x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{5}$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{\frac{7}{5}\,;\,\frac{1}{5}\}$.

(d) $\frac{x}{x-3} = \frac{12}{x} \Leftrightarrow \frac{x}{x-3} - \frac{12}{x} = 0$. On cherche les valeurs interdites : on résout $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$ et $x=0$. On résout donc cette équation pour $x \neq 3$ et $x \neq 0$.

$$\frac{x}{x-3} - \frac{12}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x(x-3)} - \frac{12(x-3)}{x(x-3)} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-12x+36}{x(x-3)} = 0$$

Un quotient est nul lorsque son numérateur est nul donc pour $x \neq 0$ et $x \neq 3$, l'équation précédente équivaut à $x^2-12x+36=0 \Leftrightarrow (x-6)^2=0 \Leftrightarrow x-6=0 \Leftrightarrow x=6$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{6\}$.

(e)

$$\begin{aligned} 3x-3x^2 = (x-1)(2x+7) &\Leftrightarrow 3x(1-x)-(x-1)(2x+7)=0 \Leftrightarrow 3x(1-x)+(1-x)(2x+7)=0 \\ &\Leftrightarrow (1-x)(3x+2x+7)=0 \Leftrightarrow (1-x)(5x+7)=0 \end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, cette équation équivaut alors à $1-x=0$ ou $5x+7=0$. Or $1-x=0 \Leftrightarrow x=1$ et $5x+7=0 \Leftrightarrow 5x=-7 \Leftrightarrow x=-\frac{7}{5}$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{1\,;\,-\frac{7}{5}\}$.

2. Comme A se trouve sur le cercle de diamètre $[BC]$ alors ABC est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2$. On sait également que ABC est isocèle en A dpnc $AB = AC = x$ et l'égalité précédente devient $2x^2 = 4^2$ soit $x^2 = \frac{16}{2} = 8$. Or, x désigne ici une longueur d'où $x \geqslant 0$ et $x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Exercice 5 :

1. voir annexe
2. voir annexe
3. (a) On sait que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AD}$ donc $\vec{w} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CE}$

   (b) Par définition, $\overrightarrow{EI} = \vec{w} = \overrightarrow{CE}$. Cela signifie que E est le milieu de $[CI]$.
4. (a) $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{IA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = -\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{IA}\right) = -\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AI}$. Grâce à cette égalité vectorielle, on peut placer N (voir annexe).

   (b) Comme $\overrightarrow{An} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{Ai}$, cela signifie, d'après la règle du parallélogramme que $ACNI$ est un parallélogramme. En particulier, ses diagonales se coupent en leur milieu. On a justifié que E est le milieu de $[CI]$ au 3b) donc E est également le milieu de la diagonale $[AN]$, ce qui se traduit vectoriellement par $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EN}$.
5. L'ensemble des points M tels que $DM = BE$ correspond au cercle de centre D et de rayon BE (voir annexe pour le tracé)