CORRECTION DU CONTRÔLE N° 3

SUJET (a)

Exercice 1 :

PARTIE A

1. (a) Les solutions de l'équation $g(x) = -2$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_g$ dont l'ordonnée est égale à -2. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{0\}$.
   (b) Les solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ qui se trouvent strictement en-dessous de l'axe des abscisses. L'ensemble des solutions est $]x_1\,;\,x_2[$ avec $x_1 \simeq -0,9$ et $x_2 \simeq 0,6$.
   (c) Les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 2$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ qui ont une ordonnée inférieure ou égale à 2. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = [-1\,;\,1] \cup \{4\}$.
   (d) Les solutions de l'inéquation $g(x) < f(x)$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_g$ qui se trouvent strictement en-dessous de $\mathcal{C}_f$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = [-1\,;\,0[\cup]1\,;\,4[$.
2. Tableau de signes de $f(x)$:

x	-1		$x_1 \simeq -0,9$		$x_2 \simeq 0,6$		$+\infty$
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. Le nombre de solutions de $g(x) = k$ est le nombre de points d'intersection entre la courbe $\mathcal{C}_g$ et la droite horizontale d'équation $y = k$.
   - Si $k < -8$ ou $k > 4,25$ alors l'équation $g(x) = k$ n'a pas de solution.
   - Si $k \in [-8\,;\,2[$ ou $k = 4,25$ alors l'équation $g(x) = k$ admet une solution.
   - Si $k \in [2\,;\,4,25[$, l'équation $g(x) = k$ admet deux solutions.

PARTIE B

1. $g(x) = -2 \;\Leftrightarrow\; -x^2 + 5x - 2 = -2 \;\Leftrightarrow\; -x^2 + 5x = 0 \;\Leftrightarrow\; x(-x + 5) = 0$. Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. Ainsi, $x = 0$ ou $-x + 5 = 0$, c'est-à-dire $x = 0$ ou $x = 5$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{0\,;\,5\}$.
   Remarque : on trouve une solution supplémentaire par rapport à la résolution graphique car f et g ne sont plus seulement définie sur $[-1\,;\,4]$
2. (a) $(x - 1)(4 - x) = 4x - x^2 - 4 + x = -x^2 + 5x - 4$.
   (b)

$$\begin{aligned}
f(x) - g(x) &= -\frac{9}{10}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{5}x - 5 - \left(-x^2 + 5x - 2\right) = -\frac{9}{10}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{5}x - 2 + x^2 - 5x + 2 \\
&= -\frac{9}{10}x^3 + \left(\frac{7}{2} + 1\right)x^2 + \left(\frac{7}{5} - 5\right)x = -\frac{9}{10}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{18}{5}x = \frac{9}{10}x\left(-x^2 + \frac{\frac{9}{2}}{\frac{9}{10}}x - \frac{\frac{18}{5}}{\frac{9}{10}}\right) \\
&= \frac{9}{10}x\left(-x^2 + \frac{9}{2} \times \frac{10}{9}x - \frac{18}{5} \times \frac{10}{9}\right) = \frac{9}{10}x(-x^2 + 5x - 4)
\end{aligned}$$

   Or, on a vu que $-x^2 + 5x - 4 = (x - 1)(4 - x)$ d'après la question précédente.
   Ainsi, $f(x) - g(x) = \dfrac{9}{10}x(x - 1)(4 - x)$

   (c) $f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; f(x) - g(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{9}{10}x(x - 1)(4 - x) = 0$. Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. Comme $\dfrac{9}{10} \neq 0$, on obtient : $x = 0$ ou $x - 1 = 0$ ou $4 - x = 0$, c'est-à-dire $x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = 4$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{0\,;\,1\,;\,4\}$.

Exercice 2 :

1. $A = (7x-1)(x-3)(x+3) = (7x-1)(x^2-9) = 7x^3 - 63x - x^2 + 9 = 7x^3 - x^2 - 63x + 9.$

$$\begin{aligned} B &= (3x-2)^2 - 2(x+1)(3x-2) = 9x^2 - 12x + 4 - (2x+2)(3x-2) \\ &= 9x^2 - 12x + 4 - (6x^2 - 4x + 6x - 4) = 9x^2 - 12x + 4 - (6x^2 + 2x - 4) \\ &= 9x^2 - 12x + 4 - 6x^2 - 2x + 4 = 3x^2 - 14x + 8 \end{aligned}$$

2. $C = (5x+2)(5x+4) + 5x + 2 = (5x+2)[(5x+4)+1] = (5x+2)(5x+5) = 5(5x+2)(x+1)$

   $D = 16x^2 + 24x + 9 = (4x)^2 + 2 \times 4x \times 3 + 3^2 = (4x+3)^2$

   $D = (3-8x)(2x+1) + 5x(8-3x) = (3-8x)(2x+1) - 5x(3-8x) = (3-8x)[(2x+1)-5x] = (3-8x)(-3x+1)$

   $E = (x-5)^2 - (2x+3)^2 = [(x-5)+(2x+3)][(x-5)-(2x+3)] = (3x-2)(x-5-2x-3) = (3x-2)(-x-8)$

$$\begin{aligned} F &= (20+12x)(x+7) + 25 - 9x^2 = 4(5+3x)(x+7) + 5^2 - (3x)^2 = 4(5+3x)(x+7) + (5+3x)(5-3x) \\ &= (5+3x)[4(x+7) + (5-3x)] = (5+3x)(4x+28+5-3x) = (5+3x)(x+33) \end{aligned}$$

Exercice 3 :

1. (a) Tableau de valeurs :

x	0	1	2	3	4	6	8	10	11	12	13	14	15	16
$g(x)$	0	107	182	231	260	282	296	350	407	492	611	770	975	1232

   (b) voir annexe

   (c) La fonction f est linéaire donc sa courbe est une droite passant par l'origine. Comme $f(10) = 470$ alors $\mathcal{C}_f$ passe par le point $A\,(10\,;\,470)$.
   voir annexe pour la courbe de f

2. Le prix de x m^2 de bois acheté dans la grande surface est $f(x) = 47x$ euros puisque chaque m^2 coût 47 euros. On cherche les valeurs de x pour lesquels les prix sont les mêmes chez les deux fournisseurs. Il nous faut donc résoudre $g(x) = 47x$, c'est-à-dire $g(x) = f(x)$.
   Les solutions de cette équation sont les abscisses des points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. On lit graphiquement qu'il y a deux solutions : $x = 6$ et $x = 13$. Pour 6 m^2 et 13 m^2 de bois achetés, les prix sont les mêmes chez les deux fournisseurs.

Exercice 4 :

1. La fonction f définie par l'algorithme est $f : x \mapsto \dfrac{6}{3+x} - 3$.

2. D'après l'algorithme, $x = -3$ est une valeur interdite puiqu'il fait afficher "erreur" si $x = -3$. On retrouve ce résultat sur la formule de f puisque le dénominateur est $x+3$ et qu'il ne doit pas être nul. En effet, $x + 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -3$. Ainsi, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Comme l'abscisse de A correspond à la valeur interdite, A ne se trouve pas sur $\mathcal{C}_f$.

3. Il s'agit de résoudre $f(x) = 0$, c'est-à-dire $\dfrac{6}{x+3} - 3 = 0$ pour tout $x \neq -3$. Cette équation équivaut à :

$$\frac{6-3(x+3)}{x+3} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{6-3x-9}{x+3} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{-3x-3}{x+3} = 0$$

   Un quotient est nul lorsque son numérateur est nul donc on obtient $-3x - 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; -3x = 3 \;\Leftrightarrow\; x = -1$. Comme $-1 \neq -3$, ce nombre correspond à l'abscisse de l'unique point d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses. $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses se coupent donc au point $M\,(-1\,;\,0)$.

SUJET (b)

Exercice 1 :

PARTIE A

1. (a) Les solutions de l'équation $f(x) = -3$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_g$ dont l'ordonnée est égale à -3. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{0\}$.

   (b) Les solutions de l'inéquation $g(x) < 0$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_g$ qui se trouvent strictement en-dessous de l'axe des abscisses. L'ensemble des solutions est $]x_1\,;\,x_2[$ avec $x_1 \simeq -2,7$ et $x_2 \simeq 0,7$.

   (c) Les solutions de l'inéquation $g(x) \leqslant 7$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_g$ qui ont une ordonnée inférieure ou égale à 7. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = [-3\,;\,2] \cup \{5\}$.

   (d) Les solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ qui se trouvent strictement en-dessous de $\mathcal{C}_g$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = [-3\,;\,0[\cup]2\,;\,5[$.

2. Tableau de signes de $g(x)$:

x	-1		$x_1 \simeq -2,7$		$x_2 \simeq 0,7$		$+\infty$
signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. Le nombre de solutions de $f(x) = k$ est le nombre de points d'intersection entre la courbe $\mathcal{C}_g$ et la droite horizontale d'équation $y = k$.
   - Si $k < -33$ ou $k > 9,25$ alors l'équation $f(x) = k$ n'a pas de solution.
   - Si $k \in [-33\,;\,7[$ ou $k = 9,25$ alors l'équation $f(x) = k$ admet une solution.
   - Si $k \in [7\,;\,9,25[$, l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions.

PARTIE B

1. $f(x) = -3 \;\Leftrightarrow\; -x^2 + 7x - 3 = -3 \;\Leftrightarrow\; -x^2 + 7x = 0 \;\Leftrightarrow\; x(-x+7) = 0$. Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. Ainsi, $x = 0$ ou $-x + 7 = 0$, c'est-à-dire $x = 0$ ou $x = 7$. Comme f n'est définie que sur $[-2\,;\,5]$ d'après l'énoncé, alors L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{0\}$ (on retire la valeur 7).

2. (a) $(x-2)(x-5) = x^2 - 2x - 5x + 10 = x^2 - 7x + 10$.

   (b)

$$\begin{aligned}
f(x) - g(x) &= -x^2 + 7x - 3 - \left(-\frac{3}{10}x^3 + \frac{11}{10}x^2 + 4x - 3\right) = -x^2 + 7x - 3 + \frac{3}{10}x^3 - \frac{11}{10}x^2 - 4x + 3 \\
&= \frac{3}{10}x^3 - \left(\frac{11}{10} + 1\right)x^2 + 3x = \frac{3}{10}x^3 - \frac{21}{10}x^2 + 3x = \frac{3}{10}x\left(x^2 - \frac{\frac{21}{10}}{\frac{3}{10}}x + \frac{3}{\frac{3}{10}}\right) \\
&= \frac{3}{10}x\left(x^2 - \frac{21}{10} \times \frac{10}{3}x + 3 \times \frac{10}{3}\right) = \frac{3}{10}x(x^2 - 7x + 10)
\end{aligned}$$

   Or, on a vu que $x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$ d'après la question précédente.

   Ainsi, $f(x) - g(x) = \dfrac{3}{10}x(x-2)(x-5)$

   (c) $f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; f(x) - g(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{3}{10}x(x-2)(x-5) = 0$. Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. Comme $\dfrac{3}{10} \neq 0$, on obtient : $x = 0$ ou $x - 2 = 0$ ou $x - 5 = 0$, c'est-à-dire $x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = 5$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{0\,;\,1\,;\,5\}$.

Exercice 2 :

1.

$$\begin{aligned}
A &= (2x-3)^2 - 3(x+2)(2x-3) = 4x^2 - 12x + 9 - (3x+6)(2x-3) \\
&= 4x^2 - 12x + 9 - (6x^2 - 9x + 12x - 18) = 4x^2 - 12x + 9 - (6x^2 + 3x - 18) \\
&= 4x^2 - 12x + 9 - 6x^2 - 3x + 18 = -2x^2 - 15x + 27
\end{aligned}$$

$B = (5x-1)(x-4)(x+4) = (5x-1)(x^2 - 16) = 5x^3 - 16 \times 5x - x^2 + 16 = 5x^3 - x^2 - 80x + 16$

2. $C = 25x^2 + 40x + 16 = (5x)^2 + 2 \times 5x \times 4 + 4^2 = (5x+4)^2$

$D = (3x+4)(3x+2) + 3x + 4 = (3x+4)[(3x+2)+1] = (3x+4)(3x+3) = 3(3x+4)(x+1)$

$E = (x-7)^2 - (3x+2)^2 = [(x-7)+(3x+2)][(x-7)-(3x+2)] = (4x-5)(x-7-3x-2) = (4x-5)(-2x-9)$

$F = (4-5x)(6x+5) + 3x(5x-4) = (4-5x)(6x+5) - 3x(4-5x) = (4-5x)[(6x+5)-3x] = (4-5x)(3x+5)$

$$\begin{aligned} G &= (9+12x)(x+5) + 9 - 16x^2 = 3(3+4x)(x+5) + 3^2 - (4x)^2 = 3(3+4x)(x+5) + (3+4x)(3-4x) \\ &= (3+4x)[3(x+5)+(3-4x)] = (3+4x)(3x+15+3-4x) = (3+4x)(-x+18) \end{aligned}$$

Exercice 3 :

1. (a) Tableau de valeurs :

x	0	1	2	3	4	6	8	10	11	12	13	14	15	16
$g(x)$	0	91	152	189	208	216	224	280	341	432	559	728	945	1216

(b) voir annexe

(c) La fonction f est linéaire donc sa courbe est une droite passant par l'origine. Comme $f(10) = 520$ alors $\mathcal{C}_f$ passe par le point $A\,(10\,;\,520)$.
voir annexe pour la courbe de f

2. Le prix de x m^2 de bois acheté dans la grande surface est $f(x) = 52x$ euros puisque chaque m^2 coût 52 euros. On cherche les valeurs de x pour lesquels les prix sont les mêmes chez les deux fournisseurs. Il nous faut donc résoudre $g(x) = 52x$, c'est-à-dire $g(x) = f(x)$.
Les solutions de cette équation sont les abscisses des points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. On lit graphiquement qu'il y a deux solutions : $x = 4$ et $x = 14$. Pour 4 m^2 et 14 m^2 de bois achetés, les prix sont les mêmes chez les deux fournisseurs.

Exercice 4 :

1. La fonction f définie par l'algorithme est $f : x \mapsto \dfrac{5}{2+x} - 4$.

2. D'après l'algorithme, $x = -2$ est une valeur interdite puiqu'il fait afficher "erreur" si $x = -2$. On retrouve ce résultat sur la formule de f puisque le dénominateur est $x+3$ et qu'il ne doit pas être nul. En effet, $x + 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -2$. Ainsi, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Comme l'abscisse de A correspond à la valeur interdite, A ne se trouve pas sur $\mathcal{C}_f$.

3. Il s'agit de résoudre $f(x) = 0$, c'est-à-dire $\dfrac{5}{x+2} - 4 = 0$ pour tout $x \neq -2$. Cette équation équivaut à :

$$\frac{5-4(x+2)}{x+2} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{5-4x-8}{x+2} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{-4x-3}{x+2} = 0$$

Un quotient est nul lorsque son numérateur est nul donc on obtient $-4x-3=0 \;\Leftrightarrow\; -4x = 3 \;\Leftrightarrow\; x = -\dfrac{3}{4}$.
Comme $-\dfrac{3}{4} \neq -2$, ce nombre correspond à l'abscisse de l'unique point d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses. $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses se coupent donc au point $M\left(-\dfrac{3}{4}\,;\,0\right)$.