Lycée J.P Vernant
spéTS

Année scolaire 2009-2010
Mathématiques

PGCD, THEOREME DE BEZOUT ET THEOREME DE GAUSS

Exercices

Exercice 1 : Utiliser l'algorithme d'Euclide pour calculer $PGCD(8575\,;\,4375)$.

Exercice 2 : Soit x et y deux entiers relatifs. Démontrer que $PGCD(3x+5y\,;\,x+2y) = PGCD(x\,;\,y)$.

Exercice 3 : Soit n un entier relatif. On pose $a = 7n+20$ et $b = 2n+7$.

1. Trouver une combinaison linéaire de a et de b indépendante de n. Que peut-on en déduire pour $PGCD(a\,;\,b)$?
2. Démontrer à l'aide du lemme d'Euclide que $PGCD(a\,;\,b) = PGCD(n-1\,;\,9)$.
3. Déterminer $PGCD(a\,;\,b)$ selon les valeurs de n.

Exercice 4 : Déterminer une solution particulière de l'équation $187x + 78y = 1$.

Exercice 5 : n désigne un entier naturel non nul.

1. Etudier suivant les valeurs de n : $PGCD(3n\,;\,2n+1)$.
2. En déduire suivant les valeurs de n : $PGCD(3n^2\,;\,n(2n+1))$.

Exercice 6 : Soit n un entier naturel. Démontrer que :

1. $3n+1$ et n sont premiers entre eux.
2. si b est premier avec n, alors $an+b$ et n sont premiers entre eux.

Exercice 7 : Démontrer que le produit de trois entiers naturels pairs consécutifs est divisible par 48.

Exercice 8 : Déterminer les nombres a et b entiers naturels tels que $\begin{cases} a^2 - b^2 = 2916 \\ PGCD(a\,;\,b) = 18 \end{cases}$

Exercice 9 :

1. On cherche à résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $3x \equiv 1\ [5]$.
   (a) *Méthode 1* :
   - Trouver une solution particulière x_0 de cette équation.
   - Démontrer que si x est solution de (E) alors $x \equiv x_0\ [5]$
   - Conclure.

   (b) *Méthode 2* : Se ramener à une équation diophantienne et la résoudre.
2. Déterminer tous les entiers relatifs x tels que :

$$a)\ \begin{cases} x \equiv 1\ [5] \\ x \equiv 4\ [7] \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x \equiv 1\ [6] \\ x \equiv 5\ [9] \end{cases}$$